

Integrální počet v $\mathbb{R}$

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy



Obsah

- 1 Primitivní funkce a základní integrační metody
 - Pojem primitivní funkce
 - Metoda per partes a substituce
- 2 Integrovaní racionálních, goniometrických a iracionálních integrálů
 - Racionální lomená funkce
 - Goniometrické funkce
 - Iracionální funkce
- 3 Riemannův integrál
 - Definice Riemannova integrálu
 - Podmínky integrovatelnosti a základní vlastnosti
 - Integrál jako funkce horní meze
 - Výpočet Riemannova integrálu
 - Základní geometrické aplikace Riemannova integrálu
 - Další geometrické aplikace Riemannova integrálu
 - Základní fyzikální aplikace Riemannova integrálu
 - Nevlastní Riemannův integrál
 - Newtonův integrál

Definice 1

Řekneme, že funkce F je na intervalu I *primitivní funkcí k funkci f* , jestliže

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Věta 1

Jsou-li funkce F a G primitivní funkce k funkci f na intervalu I , pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G = F + c$.

Důkaz.

$$F'(x) = f(x), G'(x) = f(x) \Rightarrow \underbrace{(F(x) - G(x))}' = 0 \text{ na } I \Rightarrow$$

spojitá funkce

$$F(x) - G(x) = c \in \mathbb{R}.$$



Definice 2

Množina primitivních funkcí k funkci f se nazývá *neurčitý integrál funkce f* a značí se $\int f(x)dx$.

Věta 2

- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
- $\int [c \cdot f(x)]dx = c \cdot \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}.$

Důkaz.

Důkaz plyne z příslušných vzorců pro derivování.



Poznámka

Neexistují obecné vzorce pro integrál ze součinu dvou funkcí a jejich podílu.

Věta 3 (Základní integrační vzorce)

Nechť $A, B, a, c, k, n \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \neq -1$.

$$\textcircled{1} \int k \, dx = kx + c,$$

$$\textcircled{2} \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c,$$

$$\textcircled{4} \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$

$$\textcircled{5} \int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$\textcircled{6} \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$\textcircled{7} \int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

$$\textcircled{8} \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c,$$

$$\textcircled{9} \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c,$$

$$\textcircled{10} \int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{A} + c,$$

$$\textcircled{11} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c,$$

$$\textcircled{12} \int \frac{1}{A^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c,$$

$$\textcircled{13} \int \frac{1}{A^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A+x}{A-x} \right| + c,$$

kde x náleží vždy do definičního oboru příslušné funkce.

Důkaz.

Důkaz provedeme dle definice, tedy přímým derivováním. (Přičemž bereme v úvahu větu 1.) Např.

$$\begin{aligned} [\ln(x + \sqrt{x^2 \pm B}) + c]' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm B}} \left(1 + \frac{1}{2}(x^2 \pm B)^{-1/2} 2x \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm B}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm B}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm B}} \frac{x + \sqrt{x^2 \pm B}}{\sqrt{x^2 \pm B}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} \end{aligned}$$



Poznámka

$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ je inverzní funkcí k funkci $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$.

Věta 4 (Dostatečná podmínka existence primitivní funkce)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak k ní na tomto intervalu existuje funkce primitivní.

Důkaz.

Později – viz věta 23.



Příklad 1

Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Pro $x \neq 0$ je $F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$,
pro $x = 0$ je

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$\text{tedy } F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Pro funkci $f(x) := F'(x)$ je tedy $F(x)$ primitivní funkcí na celém $\mathbb{R}$.

Funkce $f(x)$ přitom není spojitá v $x = 0$, protože

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x}}_{=0} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}}_{\text{neexistuje}}$$

neexistuje.

Tedy spojitost *není nutnou podmínkou* pro existenci primitivní funkce.

Definice 3

Řekneme, že funkce f má na intervalu I *Darbouxovu vlastnost*, jestliže $\forall t_1, t_2 \in I$ funkce f nabývá všech hodnot mezi hodnotami $f(t_1)$ a $f(t_2)$.

Poznámka

Podle 2. Bolzanovy věty spojité funkce mají Darbouxovu vlastnost.

Věta 5 (Nutná podmínka)

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu I . Pak funkce f má na intervalu I Darbouxovu vlastnost.

Důkaz.

Nechť $x_1, x_2 \in I$ jsou libovolné a předpokládejme, že $f(x_1) < f(x_2)$.
(Kdyby $f(x_1) > f(x_2)$, důkaz je obdobný.)

Nechť $\alpha \in (f(x_1), f(x_2))$ je libovolné. Ukážeme, že existuje $c \in I$ takové, že $f(c) = \alpha$.

Uvažujme funkci $g(x) = F(x) - \alpha x$, tato funkce je na uzavřeném intervalu s krajními body x_1, x_2 spojitá (má derivaci $\Rightarrow$ je spojitá) a

$$g'(x) = F'(x) - \alpha = f(x) - \alpha.$$

Dále $g'(x_1) = f(x_1) - \alpha < 0$, $g'(x_2) = f(x_2) - \alpha > 0$. Nechť $x_1 < x_2$ a $c \in (x_1, x_2)$ je takové, že $g(c) = \min\{g(x), x \in [x_1, x_2]\}$ (takové c existuje podle 2. Weierstrassovy věty). Nutně platí $g'(c) = 0$ (jinak by bod c nebyl bodem minima funkce g na intervalu $[x_1, x_2]$), tedy $0 = g'(c) = f(c) - \alpha \Rightarrow f(c) = \alpha$. Pro $x_1 > x_2$ podobně (c bude bod maxima funkce g). □

Příklad 2

K funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

neexistuje primitivní funkce na žádném intervalu obsahujícím bod $x = 0$.
Tato funkce nemá na takovém intervalu Darbouxovu vlastnost.

Příklad 3

K Dirichletově funkci $\chi(x)$ neexistuje primitivní funkce na žádném intervalu.

Příklad 4

K funkci $f(x) = |x|$ existuje primitivní funkce na celém $\mathbb{R}$. Touto primitivní funkcí je

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + c & x < 0 \end{cases}.$$

Poznámka

Není známa nutná a postačující podmínka pro integraci.

Věta 6 (Metoda per partes)

Nechť funkce u, v mají derivaci na intervalu I . Jestliže existuje primitivní funkce k funkci (uv') , pak existuje i primitivní funkce k funkci $(u'v)$ a platí

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx.$$

Důkaz.

$(uv)' = u'v + uv'$ na intervalu I . Je-li F primitivní funkce k uv' , tj. $F' = uv'$, pak pro funkci $G = uv - F$ platí

$$G' = (uv - F)' = u'v + uv' - F' = u'v + uv' - uv' = u'v,$$

tedy funkce G je primitivní funkcí k funkci $u'v$, přičemž $F = uv - G$ je vztah z věty. □

Poznámka

Jako funkci u , tedy tu , kterou při použití věty derivujeme, volíme zpravidla funkci, která se při derivování „více zlepší“.

$$\int P(x)f(x)dx,$$

kde $P(x)$ je polynom, řešíme pomocí metody per partes takto:

Je-li $f(x)$ jedna z funkcí a^{kx} , $\sin(kx)$, $\cos(kx)$, pak volíme $u = P(x)$.

Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\log_a^n(kx)$, $\arcsin(kx)$, $\arccos(kx)$, $\arctg(kx)$, $\operatorname{arccotg}(kx)$, pak volíme $u = f(x)$.

Metodu per partes lze použít opakovaně.

Příklad 5

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| \\ &= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c.\end{aligned}$$

Poznámka

Zkoušku provedeme zderivováním výsledku.

Příklad 6

$$\begin{aligned}\int 3x^2 \ln^2 x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \\ v' = 3x^2 & v = x^3 \end{array} \right| \\&= x^3 \ln^2 x - \int 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^3 dx \\&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| \\&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \left[\ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \right] \\&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{2}{3} \int x^2 dx \\&= x^3 \cdot \ln^2 x - \frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c \\&= x^3 \cdot \ln^2 x - \frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{2}{9} x^3 + c.\end{aligned}$$

Příklad 7

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + c = e^x (x^2 - 2x + 2) + c\end{aligned}$$

Příklad 8

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

Poznámka

Metodu per partes je možné použít i na součin trigonometrické funkce s funkcí exponenciální. V tomto případě se metoda provede dvakrát se stejnou volbou u, v a hledaný integrál se vyjádří přímo z obdržené rovnosti.

Příklad 9

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (-\sin x) dx \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx\end{aligned}$$

Tedy pro $I := \int e^x \sin x dx$ máme $I = e^x (\sin x - \cos x) - I$. Odtud $2I = e^x (\sin x - \cos x)$, tj.

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c.$$

Volba u, v je zde libovolná, pouze se musí zopakovat stejně.

Věta 7 (Substituční metoda)

Nechť $I, J \subseteq \mathbb{R}$ jsou intervaly, $\varphi : I \rightarrow J$, $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ a φ má na I derivaci. Je-li funkce F primitivní k funkci f na J (tj. $F'(x) = f(x)$ na J), pak funkce $F(\varphi(x))$ je primitivní na I k funkci $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

Naopak má-li funkce φ na I derivaci různou od nuly a G je primitivní funkce na I k funkci $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ (tj. $G'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$), pak funkce $G(\varphi^{-1}(x))$ je primitivní k funkci f na intervalu J .

Platí tedy vzorce:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right| = \int f(t)dt,$$

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Důkaz.

Věta vyplývá ze vzorce pro derivaci složené funkce.

V první části je F primitivní funkce k f , tj.

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

V druhé části má φ' Darbouxovu vlastnost a je buď kladná, nebo záporná na celém I . Funkce φ je tedy spojitá a ryze monotónní $\rightarrow \varphi^{-1}$ má derivaci na J a

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

Předpokladem věty je $G'(x) = (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)$, tedy

$$\begin{aligned}(G \circ \varphi^{-1})'(x) &= (G' \circ \varphi^{-1})(x) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\ &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1})(x) \cdot (\varphi' \circ \varphi^{-1})(x) \cdot \frac{1}{(\varphi' \circ \varphi^{-1})(x)} = f(x).\end{aligned}$$

Příklad 10

$$\int x e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Příklad 11

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + c$$

Příklad 12

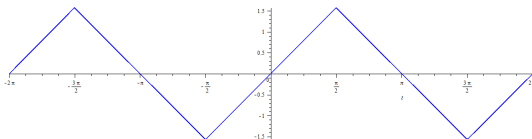
Určete primitivní funkci k funkci $\sqrt{a^2 - x^2}$ pro $x \in [-a, a]$.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\&= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\&= \frac{a^2}{2} \int 1 dt + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \frac{\sin 2t}{2} + c \\&= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + c = \frac{a^2}{2} (t \pm \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}) + c \\&= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + c\end{aligned}$$

Poznámka

Víme, že platí

$$\arcsin(\sin t) = \begin{cases} t, & t \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}, \\ -t, & t \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Tedy pro $\frac{x}{a} = \sin t$ máme $\arcsin \frac{x}{a} = \pm t$, tj. $t = \pm \arcsin \frac{x}{a}$, přičemž znaménko se shoduje se znaménkem funkce kosinus. Celkově jsme proto mohli ve výpočtu postupovat jako pro $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, protože minusy se vždy sejdou dva a všechny konstanty lze shrnout na závěr do c .
(Ve skutečnosti je samozřejmě $t \in \mathbb{R}$.)

Poznámka

Již víme, že každou racionální lomenou funkci, která není ryze lomená, lze pomocí dělení polynomů převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, kterou je možné rozložit na parciální zlomky.

Budeme se tedy zajímat pouze o integrály z parciálních zlomků

Zaměříme se na 5 typů integrálů:

$$\textcircled{1} \int \frac{A}{x-\alpha} dx,$$

$$\textcircled{2} \int \frac{A}{(x-\alpha)^n} dx,$$

$$\textcircled{3} \int \frac{A}{x^2+px+q} dx,$$

$$\textcircled{4} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx,$$

$$\textcircled{5} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx,$$

kde A, B, α, p, q jsou reálná čísla, $p^2 - 4q < 0$ a $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Typ 1 a 2 řešíme substitucí $t = x - \alpha$.

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{(x - \alpha)^n} dx &= \left| \begin{array}{l} x - \alpha = t \\ dx = dt \end{array} \right| = A \int \frac{1}{t^n} dt \\ &= \begin{cases} A \ln |t| + c = A \ln |x - \alpha| + c & (n = 1) \\ A \frac{t^{1-n}}{1-n} + c = \frac{A}{(1-n)t^{n-1}} + c = \frac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}} + c & (n \neq 1) \end{cases}\end{aligned}$$

Příklad 13 (Typ 1)

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{2x-8} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2x - 8 \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{3}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{3}{2} \int \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{3}{2} \ln |t| + c = \frac{3}{2} \ln |2x - 8| + c.\end{aligned}$$

Příklad 14 (Typ 2)

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{(2x-8)^3} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2x - 8 \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{3}{t^3} \frac{1}{2} dt = \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= \frac{3}{2} \int t^{-3} dt = \frac{3}{2} \frac{t^{-2}}{-2} + c \\ &= \frac{3}{-4} \frac{1}{t^2} + c = \frac{-3}{4(2x-8)^2} + c.\end{aligned}$$

Typ 3 řešíme doplněním jmenovatele na čtverec a použitím vzorce pro $\int \frac{1}{A^2+x^2} dx$.

Příklad 15 (Typ 3)

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{2x^2 - 4x + 10} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x-1)^2 + 4} dx \\&= \left| \begin{array}{l} t = x - 1 \\ dx = dt \end{array} \right| = \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2 + 2^2} dt \\&= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + c = \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + c.\end{aligned}$$

Typ 4 řešíme převedením na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ a integrálu typu 3. ($A \neq 0$, jinak by šlo o typ 3.)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= A \int \frac{x + \frac{B}{A}}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x + p + \overbrace{\frac{2B}{A} - p}^{=:C}}{x^2 + px + q} dx \\
 &= \frac{A}{2} \left(\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + C \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx \right) = \left| \begin{array}{l} x^2 + px + q = t \\ (2x + p)dx = dt \end{array} \right| \\
 &= \frac{A}{2} \int \frac{1}{t} dt + \frac{AC}{2} \int \frac{1}{\underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{:=D^2}}}_{dx = dz} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = z \\ dx = dz \end{array} \right| \\
 &= \frac{A}{2} \ln|t| + \frac{AC}{2} \int \frac{1}{z^2 + D^2} dz = \frac{A}{2} \ln|t| + \frac{AC}{2D} \operatorname{arctg} \frac{z}{D} + c \\
 &= \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{AC}{2D} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{D} + c
 \end{aligned}$$

Příklad 16 (Typ 4)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-6}{x^2+2x+3} dx &= 3 \int \frac{x-2}{x^2+2x+3} dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2+2x+3} dx \\&= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2-2-4}{x^2+2x+3} dx \\&= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} + \frac{-6}{x^2+2x+3} dx\end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx = \ln |x^2+2x+3| + c_1$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -6 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = -6 \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x + 1 \\ dt = dx \end{array} \right| \\ &= -6 \int \frac{1}{t^2 + 2} dt = -6 \int \frac{1}{t^2 + (\sqrt{2})^2} dt = \frac{-6}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c_2 \\ &= -3\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2} + c_2 \end{aligned}$$

Celkem

$$\int \frac{3x - 6}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{3}{2} \left(\ln |x^2 + 2x + 3| - 3\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2} \right) + c$$

Příklad 17

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3 + 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{3} \int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} dx \\&= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{3}{3 \cdot 2} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \\&= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\&= \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt \\&= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{2}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c \\&= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c\end{aligned}$$

Typ 5 řešíme podobnou úpravou jako typ 4, tedy rozdělením na dvě části, kde první část lze vyřešit snadnou substitucí (čitatel je derivací trojčlene ze jmenovatele) a na druhou část použijeme rekurentní vzorec (viz dále).

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{\frac{2B}{A} - p}{(x^2 + px + q)^n} dx \\
 &= \left| \begin{array}{l} x^2 + px + q = t \\ (2x + p)dx = dt \end{array} \right| = \frac{A}{2} \int \frac{1}{t^n} dt + \frac{A}{2} \int \frac{C}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \right]^n} dx \\
 &= \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = z \\ dx = dz \end{array} \right| = \frac{A}{2} \int \frac{1}{t^n} dt + \frac{A}{2} \int \frac{C}{(z^2 + D^2)^n} dz \\
 &= \frac{A}{2} \int \frac{1}{t^n} dt + \frac{AC}{2D^{2n}} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{z}{D}\right)^2 + 1\right]^n} dz = \left| \begin{array}{l} \frac{z}{D} = s \\ dz = Dds \end{array} \right| \\
 &= \frac{A}{2} \int \frac{1}{t^n} dt + \frac{AC}{2D^{2n-1}} \int \frac{1}{(s^2 + 1)^n} ds = \frac{A}{2(1-n)t^{n-1}} + E \int \frac{1}{(s^2 + 1)^n} ds
 \end{aligned}$$

Nyní musíme vyřešit poslední integrál. Odvod' me rekurentní vzorec.

$$\begin{aligned}\underbrace{\int \frac{ds}{(1+s^2)^n}}_{=:I_n} &= \int \frac{1+s^2-s^2}{(1+s^2)^n} ds = \underbrace{\int \frac{ds}{(1+s^2)^{n-1}}}_{=:I_{n-1}} - \int \frac{s \cdot s}{(1+s^2)^n} ds \\&= I_{n-1} + \frac{s}{2(n-1)(1+s^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \\&= \frac{s}{2(n-1)(1+s^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}\end{aligned}$$

Tímto způsobem lze postupně snižovat exponent ve jmenovateli integrálu I_n až na 1, což vede na funkci $\arctg s$.

Kde jsme použili následující mezivýpočet.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{s \cdot s}{(1+s^2)^n} ds &= \left| \begin{array}{ll} u = s & u' = 1 \\ v' = \frac{s}{(1+s^2)^n} & v = (*) \end{array} \right| \\
 &= \frac{s}{2(1-n)(1+s^2)^{n-1}} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-n)(1+s^2)^{n-1}} dt \\
 &= -\frac{s}{2(n-1)(1+s^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \underbrace{\int \frac{1}{(1+s^2)^{n-1}} dt}_{I_{n-1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (*) &= \int \frac{s}{(1+s^2)^n} ds = \frac{1}{2} \int \frac{2s}{(1+s^2)^n} ds = \left| \begin{array}{l} 1+s^2 = w \\ 2s ds = dw \end{array} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{w^n} dw = \frac{1}{2(1-n)w^{n-1}}
 \end{aligned}$$

Příklad 18

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx \\
 &= \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \cdot x}{(1+x^2)^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ v' = \frac{2x}{2(1+x^2)^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \frac{-1}{2(1+x^2)} \end{array} \right| \\
 &= \operatorname{arctg} x - \left(-\frac{x}{2(1+x^2)} - \int \frac{-1}{2(1+x^2)} dx \right) \\
 &= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c
 \end{aligned}$$

Vzorcem:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{2(2-1)(1+x^2)^{2-1}} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \int \frac{1}{(1+x^2)^1} dx$$

Symbolem $R(u, v)$ budeme rozumět racionální lomenou funkci v proměnných u, v , tj. u, v jsou svázány operacemi $+, -, \cdot, /$, $()^z$ ($z \in \mathbb{Z}$).

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

- a) Je-li R lichá funkce vzhledem k první proměnné, tj.
 $R(-u, v) = -R(u, v)$ (je lichá vzhledem k $\sin x$), pak volíme substituci $\cos x = t$.
- b) Je-li lichá vzhledem k $\cos x$, tj. $R(u, -v) = -R(u, v)$, pak volíme substituci $\sin x = t$.
- c) Je-li $R(-u, -v) = R(u, v)$, tj. je lichá nebo sudá vzhledem k oběma proměnným, volíme $\operatorname{tg} x = t$.
- d) Nenastane-li žádný z výše uvedených případů, pak použijeme univerzální substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Každá ze substitucí převede integrál $\int R(\sin x, \cos x) dx$ na integrál z racionální lomené funkce.

Příklad 19

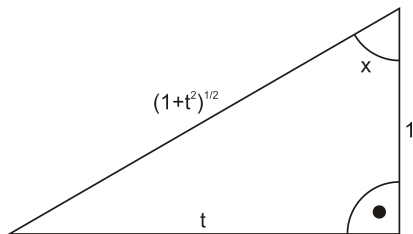
$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = - \int \underbrace{\sin^2 x}_{1 - \cos^2 x} t^2 dt \\ &= - \int (1 - t^2) t^2 dt = \dots\end{aligned}$$

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \begin{cases} \text{je-li } n \text{ liché a } m \text{ sudé} \rightarrow t = \cos x \\ \text{je-li } n \text{ sudé a } m \text{ liché} \rightarrow t = \sin x \\ n \text{ i } m \text{ liché} \rightarrow t = \sin x, t = \cos x, t = \operatorname{tg} x \\ n \text{ i } m \text{ sudé} \rightarrow t = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Vždy je možné použít $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Příklad 20

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{1}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| \\ &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+3\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{1+t^2+3} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{4+t^2} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2} \right) + c\end{aligned}$$



Příklad 21

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin x + 2}{\cos x - 2} dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| \\
 &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + 2}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2} \frac{2}{1+t^2} dt = -4 \int \frac{1+t+t^2}{(3t^2+1)(t^2+1)} dt \\
 &= |\text{rozklad na parciální zlomky}| = -4 \int \frac{\frac{3}{2}t+1}{3t^2+1} dt - 4 \int \frac{-\frac{1}{2}t}{t^2+1} \\
 &= -4 \left(\frac{1}{4} \ln(1+3t^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}t) - \frac{1}{4} \ln(1+t^2) \right) + c = \dots
 \end{aligned}$$

Kde

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx, \quad m, n \in \mathbb{N}_0$$

Příklad 22

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = ?$$

$$\begin{aligned} a) &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, dx = \frac{1}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{t^4}{(1+t^2)^4} dt = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) &= \left| \begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{array} \right| = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int 1 dx - \frac{1}{8} \underbrace{\int (\cos 2x - \cos^3 2x) dx}_{\text{subst.: } \sin 2x = t} - \frac{1}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \dots \end{aligned}$$

Integrály typu

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x dx, \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

lze zjednodušit převedením na součet.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha x \pm \beta x) &= \sin \alpha x \cos \beta x \pm \cos \alpha x \sin \beta x \\ \Rightarrow \sin \alpha x \cos \beta x &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha x + \beta x) + \sin(\alpha x - \beta x)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha x \pm \beta x) &= \cos \alpha x \cos \beta x \mp \sin \alpha x \sin \beta x \\ \Rightarrow \sin \alpha x \sin \beta x &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha x - \beta x) - \cos(\alpha x + \beta x)] \\ \Rightarrow \cos \alpha x \cos \beta x &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha x + \beta x) + \cos(\alpha x - \beta x)]\end{aligned}$$

Příklad 23

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos 3x dx &= \int \frac{1}{2} [\sin 5x + \sin(-x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 5x dx - \frac{1}{2} \int \sin x dx = \frac{-1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + c\end{aligned}$$

U integrálů typu

$$\int R(x, x^{q_1}, \dots, x^{q_n}) dx, \quad q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$$

je výhodné volit substituci $t^s = x$, kde s je nejmenší společný násobek jmenovatelů čísel $q_1, \dots, q_n$.

Příklad 24

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[5]{x} - 3\sqrt{x}}{x} dx &= \left| \begin{array}{l} t^{10} = x \Rightarrow t = \sqrt[10]{x} \\ 10t^9 dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t^{10/5} - 3 \cdot t^{10/2}}{t^{10}} \cdot 10t^9 dt \\ &= \int \frac{t^2 - 3t^5}{t^{10}} 10t^9 dt = 10 \int t - 3t^4 dt = 10 \left(\frac{t^2}{2} - 3\frac{t^5}{5} \right) + c \\ &= 5 \sqrt[10]{x^2} - 6 \sqrt[10]{x^5} + c = 5\sqrt[5]{x} - 6\sqrt{x} + c. \end{aligned}$$

Na integrály typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^s\right) dx, \quad s \in \mathbb{Q}, s = \frac{m}{n}$$

používáme substituci $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, tedy

$$ax + b = t^n(cx + d) \Rightarrow x(a - t^n c) = t^n d - b$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^n d - b}{a - t^n c}, \quad dx = \left(\frac{t^n d - b}{a - t^n c}\right)' dt$$

Příklad 25

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{x+1} dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^3, x+1 = t^3x - t^3, x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = \frac{3t^2(t^3-1) - 3t^2(t^3+1)}{(t^3-1)^2} dt = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} dt \end{array} \right| \\&= \int t \cdot \frac{1}{\frac{t^3+1}{t^3-1} + 1} \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} dt = - \int \frac{6t^3}{(t^3+1+t^3-1)(t^3-1)} dt \\&= -3 \int \frac{1}{t^3-1} dt = \dots \text{ (rozklad na parc. zlomky)}\end{aligned}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

kde $b^2 - 4ac \neq 0$, tj. kvadratický polynom nemá dvojnásobný reálný kořen. Nejprve uvažujme případ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- a) Jestliže $a > 0$ a kvadratický polynom má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$, potom

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \sqrt{(x - x_1)^2 \frac{x - x_2}{x - x_1}} = \sqrt{a} |x - x_1| \sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}},$$

poté ho s použitím substituce $t^2 = \frac{x - x_2}{x - x_1}$ převedeme na integrál z RLF.

- b) Jestliže $a < 0$ a kvadratický polynom má dva reálné kořeny $x_1 < x_2$, potom

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a} \sqrt{(x - x_1)^2 \frac{x_2 - x}{x - x_1}} = \sqrt{-a} (x - x_1) \sqrt{\frac{x_2 - x}{x - x_1}},$$

poté ho s použitím substituce $t^2 = \frac{x_2 - x}{x - x_1}$ převedeme na integrál z RLF.

Pokud polynom nemá reálné kořeny, pak nutně $a > 0$ (jinak nelze odmocňovat) a můžeme použít některou z tzv. *Eulerových substitucí*. Protože je lze použít i v případě reálných kořenů, objevuje se u první z nich podmínka na kladnost a . Volba znamének v místech se symbolem ' $\pm$ ' je libovolná.

$$\textcircled{1} \quad a > 0 : \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} \pm t \\ \Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}tx + t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$

$$\textcircled{2} \quad c > 0 : \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c} \\ \Rightarrow ax^2 + bx + c = x^2 t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c \Rightarrow ax + b = xt^2 \pm 2t\sqrt{c} \\ \Rightarrow x = \frac{-b \pm 2t\sqrt{c}}{a - t^2}$$

$$\textcircled{3} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t \\ \Rightarrow ax^2 + bx + c = (x - x_1)^2 t^2 \Rightarrow a(x - x_2) = (x - x_1)t^2$$

Kde poslední substituce je znovu pouze pro případ existence dvou reálných kořenů.

Příklad 26

$I = \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$ řešíme pomocí Eulerovy substituce 1, znaménka volíme tak, aby ve jmenovateli vyšlo pouze t :

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = x - t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}, dx = \frac{2(t^2 - t + 1)}{(2t - 1)^2} dt,$$

tedy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(t^2 - t + 1)}{t(2t - 1)^2} dt = 2 \int \frac{t^2 - t + 1}{t(2t - 1)^2} dt \\ &= 2 \int \frac{A}{t} + \frac{B}{2t - 1} + \frac{C}{(2t - 1)^2} dt = \dots \end{aligned}$$

Příklad 27

$I = \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$ lze řešit také pomocí Eulerovy substituce 2:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = xt + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2t + 1}{1 - t^2}, dx = \frac{2(t^2 + t + 1)}{(1 - t^2)^2} dt,$$

tedy

$$I = 2 \int \frac{1}{\frac{2t+1}{1-t^2} - \left(\frac{2t+1}{1-t^2}t + 1\right)} \frac{t^2 + t + 1}{(1 - t^2)^2} dt = \int \text{RLF } dt = \dots$$

Příklad 28

$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$, kde $-x^2 + 3x - 2 = -(x-1)(x-2)$, vyřešme pomocí Eulerovy substituce 3:

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = (x-1)t &\Rightarrow -(x-2) = (x-1)t^2 \\ \Rightarrow x = \frac{2+t^2}{1+t^2}, dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt,\end{aligned}$$

tedy

$$I = \int \frac{\frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt}{\left(\frac{2+t^2}{1+t^2} - 1\right)^2 t} = -2 \int dt = -2t + c = \frac{-2\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}{x-1} + c.$$

Další možností je doplnění kvadratického polynomu pod odmocninou na čtverec a podle jeho typu pak použití jedné z následujících substitucí.

$$\textcircled{1} \quad R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2}) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\alpha}{\sin t},$$

$$\textcircled{2} \quad R(x, \sqrt{x^2 + \alpha^2}) \quad \Rightarrow \quad x = \alpha \operatorname{tg} t,$$

$$\textcircled{3} \quad R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2}) \quad \Rightarrow \quad x = \alpha \sin t.$$

Tím převedeme integrál na typ $\int R(\sin t, \cos t) dt$.

Speciální případy

$$a) \boxed{\int x^n \sqrt{a^2 - x^2} dx}, \quad b) \boxed{\int x^n \sqrt{a^2 + x^2} dx}$$

(i) n liché, $n \in \mathbb{Z}$, pak substituce je

$$a) a^2 - x^2 = t^2, \quad b) a^2 + x^2 = t^2,$$

(ii) n sudé, $n \in \mathbb{Z}$, pak

$$a) x = a \sin t, \quad b) x = a \operatorname{tg} t.$$

Příklad 29

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx &= \int \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t^2 \\ -2x dx = 2t dt \end{array} \right| \\ &= \int \frac{-t}{1-t^2} t dt = \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int 1 + \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1} dt \\ &= t + \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{2} \ln|t+1| + c = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} \right| + c\end{aligned}$$

Příklad 30

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} \\&= \int \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \left| \begin{array}{l} \sin t = u \\ \cos t dt = du \end{array} \right| \\&= \int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \dots\end{aligned}$$

Předchozí příklad lze vyřešit i takto.

Příklad 31

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \int \frac{x \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right| \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2} - I \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2} \right] + c \end{aligned}$$

Binomický integrál $\int x^m(a + bx^n)^p dx$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$

lze převést na integrál z RLF takto

- (i) $p \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = t^s, s = \text{nejmenší spol. násobek jmenovatelů } m, n,$
- (ii) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + bx^n = t^s, s = \text{jmenovatel } p,$
- (iii) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow ax^{-n} + b = t^s, s = \text{jmenovatel } p.$

Poznámka

Samozřejmě pokud je $p \in \mathbb{N}$, stačí integrand roznásobit.

Příklad 32

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx &= \mid m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}, p = -2 \Rightarrow x = t^6, dx = 6t^5 dt \mid \\ &= 6 \int \frac{t^3}{(1 + t^2)^2} t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{(1 + t^2)^2} dt = \dots \mid \text{parc. zlomky} \mid\end{aligned}$$

Příklad 33

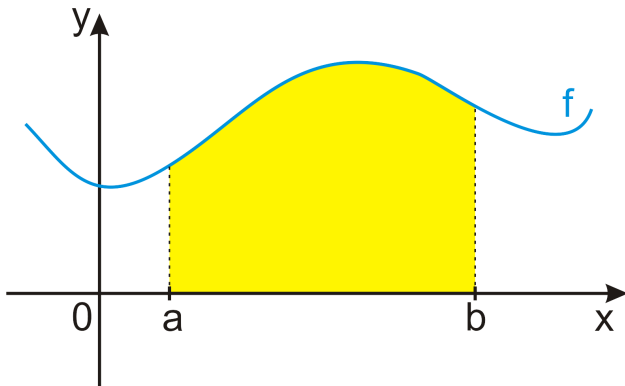
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= \left| \begin{array}{l} m=0, n=4, p=-\frac{1}{4} \\ x^{-4} + 1 = t^4, x^4 = \frac{1}{t^4-1}, x = \frac{1}{\sqrt[4]{t^4-1}}, dx = \frac{-4t^3}{4\sqrt[4]{(t^4-1)^5}} dt \end{array} \right| \\ &= \int \left[\frac{t}{(t^4-1)^{1/4}} \right]^{-1} \frac{-t^3}{(t^4-1)^{5/4}} dt = - \int \frac{t^2}{t^4-1} dt = \dots \end{aligned}$$

Poznámka (Nevypočitatelné integrály)

Některé primitivní funkce k elementárním funkcím nemusí být funkce elementární, ale tzv. *vyšší transcendentní funkce*. Jsou to např.

- integrálsinus $\int \frac{\sin x}{x} dx, x \in \mathbb{R}$, kde integrand v nule je dodefinován jako jednička;
- logaritmusintegrál $\int \ln^{-1} x, x \in (0, 1), x \in (1, \infty)$;
- exponenciální integrál $\int \frac{e^x}{x} dx, x \in (-\infty, 0), x \in (0, \infty)$;
- chybová funkce $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx, x \in \mathbb{R}$;
- Fresnelovy integrály $\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx, x \in \mathbb{R}$;
- $\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$, kde P je polynom 3. nebo 4. stupně bez násobných kořenů (eliptické integrály).

Naším cílem nyní bude výpočet plochy podgrafu dané (nezáporné) funkce f .



$$\text{Podgraf} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Definice 4 (Dělení intervalu)

Uvažujme uzavřený interval $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$.

Dělením intervalu I rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bodů z intervalu I takových, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ nazýváme *dělicí body*.

Normou $\nu(D)$ dělení D rozumíme maximální vzdálenost sousedních dělicích bodů, tedy

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n\}.$$

Definice 5

Jsou-li D_1, D_2 dělení intervalu $[a, b]$ a platí $D_1 \subseteq D_2$ (tj. každý dělicí bod D_1 je i dělicím bodem D_2), řekneme, že D_2 je *zjemněním* D_1 .

Dělení $D_1 \cup D_2$ se nazývá *nejmenší společné zjemnění* dělení D_1 a D_2 .

Poznámka

V průběhu konstrukce Riemannova integrálu předpokládáme, že funkce f je ohraničená na intervalu $[a, b]$.

Nechť $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $[a, b]$. Označme

$$m_i = \inf\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$M_i = \sup\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Čísla m_i, M_i jsou dobře definována vzhledem k předpokladu ohraničenosti funkce f . Potom

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *dolní součet* příslušný dělení D a podobně

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *horní součet* příslušný dělení D .

Je zřejmé, že

$$D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow s(D_1, f) \leq s(D_2, f), \quad S(D_1, f) \geq S(D_2, f).$$

Z předpokladu ohraničenosti funkce f na intervalu $[a, b]$ plyne existence $c, d \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\begin{aligned}\forall x \in [a, b] : c \leq f(x) \leq d &\Rightarrow c \leq m_i, M_i \leq d, i = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow c(b-a) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq d(b-a).\end{aligned}$$

Navíc jsou-li D_1, D_2 libovolná dělení intervalu $[a, b]$, pak

$$s(D_1, f) \leq S(D_2, f).$$

Tato nerovnost plyne z faktu, že

$$s(D_1, f) \leq s(D_1 \cup D_2, f) \leq S(D_1 \cup D_2, f) \leq S(D_2, f).$$

Odtud plyne, že množina všech dolních součtů je shora ohraničená (např. číslem $d(b-a)$) a množina všech horních součtů je zdola ohraničená (např. číslem $c(b-a)$) a množiny obou součtů jsou neprázdné.

Definice 6

Symbolem $\mathcal{D}$ budeme rozumět množinu všech dělení intervalu $[a, b]$. Chceme-li zdůraznit, že se jedná o dělení intervalu $[a, b]$, píšeme $\mathcal{D}([a, b])$.

Označíme supremum množiny všech dolních součtů jako

$$\int_a^b f(x)dx := \sup\{s(D, f), D \in \mathcal{D}\}.$$

Toto číslo se nazývá *dolní Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a, b]$. Podobně

$$\int_a^b f(x)dx := \inf\{S(D, f), D \in \mathcal{D}\}$$

je *horní Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a, b]$.

Definice 7

Jestliže platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(x)dx,$$

řekneme, že funkce f je *(Riemannovsky) integrovatelná* na intervalu $[a, b]$ a definujeme

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Příklad 34

Uvažujme funkci $f(x) = \chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ na intervalu $[a, b] = [0, 1]$.

Je-li D libovolné dělení intervalu $[0, 1]$, $D = \{x_0, \dots, x_n\}$, pak

$$m_i = \inf\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0, \quad M_i = \sup\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1,$$

kde $i = 1, \dots, n$, tedy

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = 0, \quad S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = 1.$$

Odtud

$$\int_0^1 \chi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \chi(x) dx = 1,$$

tedy funkce f není integrovatelná na intervalu $[0, 1]$.

Věta 8

Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a, b]$ a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D , pro něž $\nu(D) < \delta$ platí

$$\int_a^b f(x)dx - \varepsilon < s(D, f) \leq \int_a^b f(x)dx$$

a

$$\int_a^b f(x)dx + \varepsilon > S(D, f) \geq \int_a^b f(x)dx.$$

Poznámka

Pro přehlednost zápisů označme symbolem $d(I)$ délku intervalu I , tj. pro $I = [a, b]$, $b \geq a$, je $d(I) = b - a$.

Důkaz.

Tvrzení dokážeme pro horní součty (pro dolní se dokáže analogicky).

Nerovnost $S(D, f) \geq \int_a^b f(x)dx$ plyne z definice horního Riemannova integrálu.

Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice horního Riemannova integrálu plyne, že existuje dělení D_1 takové, že

$$\int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} > S(D_1, f).$$

Podle předpokladu ohraničenosti funkce f na intervalu $[a, b]$

$$\exists K > 0: |f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b].$$

Dále nechť $\{z_0, \dots, z_p\}$ jsou dělicí body dělení D_1 a nechť $\delta = \frac{\varepsilon}{K \cdot p \cdot 4}$.

Ukážeme, že toto δ má vlastnost požadovanou v tvrzení věty.

Nechť D je libovolné dělení intervalu $[a, b]$, pro něž $\nu(D) < \delta$.

Označme $D_2 = D \cup D_1$, pak

$$\int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} > S(D_1, f) \geq S(D_2, f).$$

Přitom máme $S(D, f) \geq S(D_2, f)$. K důkazu nerovnosti uvedené ve větě tedy stačí dokázat, že $S(D, f) - S(D_2, f) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nechť $\{I_1, \dots, I_n\}$ je množina všech intervalů dělení D takových, že v intervalu I_k neleží žádný z bodů dělení D_1 , a nechť $\{J_1, \dots, J_m\}$ je množina zbývajících dělicích intervalů dělení D .

Protože uvnitř každého intervalu J_i leží některý z bodů $z_1, \dots, z_{p-1}$, je $m \leq p - 1$. Protože naopak uvnitř žádného intervalu I_i takový bod neleží, je každý z intervalů $I_1, \dots, I_n$ také dělicím intervalem dělení D_2 .

Označme zbývající dělicí intervaly dělení D_2 jako $\{J'_1, \dots, J'_s\}$ a

$$M_k := \sup\{f(x) : x \in I_k\} \text{ pro } k = 1, \dots, n,$$

$$N_i := \sup\{f(x) : x \in J_i\} \text{ pro } i = 1, \dots, m,$$

$$N'_t := \sup\{f(x) : x \in J'_t\} \text{ pro } t = 1, \dots, s.$$

Vzhledem k ohraničenosti funkce f jsou všechna tato čísla v intervalu $[-K, K]$.

Můžeme tedy počítat

$$\begin{aligned} S(D, f) - S(D_2, f) &= \sum_{k=1}^n M_k d(I_k) + \sum_{i=1}^m N_i d(J_i) - \\ &\quad - \left(\sum_{k=1}^n M_k d(I_k) + \sum_{t=1}^s N'_t d(J'_t) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m |N_i| d(J_i) + \sum_{t=1}^s |N'_t| d(J'_t) \leq K \left(\sum_{i=1}^m d(J_i) + \sum_{t=1}^s d(J'_t) \right). \end{aligned}$$

Protože $\sum_{t=1}^s d(J'_t)$ je součet délek všech dělicích intervalů dělení D_2 různých od intervalů $I_1, \dots, I_n$, platí

$$\sum_{t=1}^s d(J'_t) = \sum_{i=1}^m d(J_i).$$

Dále

$$\sum_{t=1}^s d(J'_t) = \sum_{i=1}^m d(J_i) \leq m \nu(D) < p \nu(D) < p \delta.$$

Proto

$$S(D, f) - S(D_2, f) < 2Kp\delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

čímž je požadovaná nerovnost a tím i celé tvrzení dokázáno. □

Definice 8

Řekneme, že posloupnost D_n dělení intervalu $[a, b]$ je *nulová*, pokud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0.$$

Pro rovnoměrné (ekvidistantní) rozdělení to znamená

$$\nu(D_n) = \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Věta 9

Nechť D_n je libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(D_n, f) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n, f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz.

Dokážeme druhý vztah (první se dokazuje analogicky).

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Potřebujeme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ je

$$\left| S(D_n, f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Podle předchozí věty k ε existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí $\int_a^b f(x) dx \leq S(D, f) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$. Protože $\nu(D_n) \rightarrow 0$, k danému δ existuje n_0 takové, že $\forall n \geq n_0$ je

$$\nu(D_n) < \delta \Rightarrow \forall n \geq n_0 : \int_a^b f(x) dx \leq S(D_n, f) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon,$$

odtud plyne, že $|S(D_n, f) - \int_a^b f(x) dx| < \varepsilon$. □

Příklad 35

Pomocí Věty 9 rozhodněte, zda je funkce $f(x) = x$ integrovatelná na intervalu $[0, 1]$.

Nechť $D_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$. Potom $m_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$, $M_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$, tedy

$$s(D_n, x) = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{n(n-1)}{2n^2},$$

$$S(D_n, x) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Odtud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(D_n, x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(D_n, x) = \frac{1}{2}.$$

Proto $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Věta 10

Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a, b]$. Pak je f integrovatelná na $[a, b]$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a, b]$ tak, že platí

$$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Důkaz ($\Rightarrow$).

Předpokládejme, že $\int_{\bar{a}}^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$. Podle věty 8 k danému

$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta > 0$ takové, že $s(D, f) \in \left(\int_{\bar{a}}^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}, \int_{\bar{a}}^b f(x)dx \right]$ a

$S(D, f) \in \left[\int_a^{\bar{b}} f(x)dx, \int_a^{\bar{b}} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ pro každé dělení D , pro něž

$\nu(D) < \delta$. Necht' D je libovolné dělení, pro které $\nu(D) < \delta$, pak

$$s(d, f), S(D, f) \in \left(\int_{\bar{a}}^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}, \int_a^{\bar{b}} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$\Rightarrow S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Důkaz ($\Leftarrow$).

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Podle předpokladu existuje dělení D s vlastností $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$. Protože ale $\int_a^b f(x) dx \leq S(D, f)$ a

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx \geq s(D, f), \text{ máme } \underbrace{\int_a^b f(x) dx - \int_{\bar{a}}^b f(x) dx}_{\geq 0} < \varepsilon. \text{ Jelikož } \varepsilon \text{ bylo}$$

libovolné, platí $\int_a^b f(x) dx = \int_{\bar{a}}^b f(x) dx$. □

Věta 11

Nechť funkce f je ohraničená a monotónní na intervalu $[a, b]$. Pak je f integrovatelná na $[a, b]$.

Důkaz.

Předpokládejme, že f je neklesající (pro nerostoucí je důkaz obdobný).

Je-li $f(b) = f(a)$, pak je f konstantní na $[a, b]$ a tedy integrovatelná, neboť $s(D, f) = S(D, f) \forall D \in \mathcal{D}$.

Nechť $f(b) - f(a) > 0$ a nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Uvažujme $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Nechť D je libovolné dělení s $\nu(D) < \delta$, pak

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \\ &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{< \delta} < \delta \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \delta [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})] \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(b) - f(a)] = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy funkce f je (podle věty 10) integrovatelná. □

Věta 12

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, pak je na tomto intervalu integrovatelná.

Poznámka

- Předpoklad ohraničenosti funkce je schován ve spojitosti uvažované funkce a plyne z 1. Weierstrassovy věty.
- Podle Heineho–Cantorovy věty je funkce f spojitá stejnoměrně^a. (Spojitá funkce z kompaktního metrického prostoru do metrického prostoru je stejnoměrně spojitá.)

$$^a \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Důkaz.

Nechť $\varepsilon > 0$ libovolné. Ze stejnoměrné spojitosti f dostáváme, že k číslu $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ platí

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Nechť D je dělení s $\nu(D) < \delta$, pak

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(s_i)](x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

kde $t_i, s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ taková, že $f(t_i) = M_i$, $f(s_i) = m_i$ (existence t_i, s_i plyne z 2. Weierstrassovy věty).

Protože $|t_i - s_i| < \delta$, je $f(t_i) - f(s_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, a dostaneme

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(s_i)](x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \mid \text{součet dílků dá délku intervalu} \mid = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$



Definice 9

Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}$ má *Jordanovu míru* rovnu nule, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje systém po dvou disjunktních otevřených intervalů $J_i, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$, s vlastností

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^n J_i \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n d(J_i) < \varepsilon,$$

kde $d(J_i)$ značí délku intervalu J_i .

Poznámka

Konečná množina bodů má nulovou míru.

Lemma 1

Nechť $M = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ je množina bodů konvergentní posloupnosti reálných čísel, tj. $x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$. Pak M má míru nula.

Např. množina $M = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ má míru nula.

Důkaz.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné, z definice $\lim x_n = x_0$ plyne, že k číslu $\frac{\varepsilon}{4}$ existuje n_0 takové, že

$$\forall n > n_0 : |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nechť $J_0 = (x_0 - \frac{\varepsilon}{4}, x_0 + \frac{\varepsilon}{4})$. Vně tohoto intervalu leží nejvýše n_0 členů posloupnosti $\{x_n\}$, a to $x_1, \dots, x_{n_0}$. Kolem těchto zbývajících bodů sestrojíme otevřená okolí s délkou menší než $\frac{\varepsilon}{4n_0}$, označíme je $J_1, \dots, J_{n_0}$. Pokud již některý z bodů x_i ležel v intervalu J_0 , tak položíme $J_i = \emptyset$. Dále označme $I = \{i \in \{1, \dots, n_0\} : J_i \neq \emptyset\}$ (množina všech indexů neprázdných intervalů $J_i, i = 1, \dots, n_0$). Celkově tedy množinu M lze pokrýt po dvou disjunktními intervaly $J_0, J_i, i \in I$ takovými, že

$$d(J_0) + \sum_{i \in I} d(J_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \frac{\varepsilon}{4n_0} < \varepsilon.$$



Věta 13

Nechť funkce f je na intervalu $[a, b]$ ohraničená a množina jejích bodů nespojitosti na tomto intervalu má míru nula. Pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ integrovatelná.

Důkaz.

Důkaz je opět založen na větě 10 (detaily viz skripta). Body nespojitosti pokryjeme intervaly $J_1, \dots, J_{n_0}$ (pro $n_0 \in \mathbb{N}$ bodů nespojitosti). Tyto intervaly lze zvolit libovolně malé, tedy součet jejich délek bude libovolně malý. Protože funkce f je ohraničená ($\exists K \in \mathbb{R}^+ : |f| < K$), tedy příspěvek těchto intervalů do rozdílu $S(D, f) - s(D, f)$ bude libovolně malý. Na zbylých částech intervalu $[a, b]$ je funkce spojitá a lze zde tedy provést konstrukci z důkazu věty 12 (spolu s intervaly J_i tak získáme dělení D) a jejich příspěvky zmenšit pod $\frac{\varepsilon}{2}$.



$$\begin{aligned}
 S(D, f) - s(D, f) &= \\
 &= \text{pěkné příspěvky (spojité intervaly)} + \text{škaradé příspěvky (intervaly } J_i) \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n_0} \underbrace{(M_i - m_i)}_{< 2K} \underbrace{d(J_i)}_{< \frac{\varepsilon}{4Kn_0}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$



Věta 14

Nechť f, g jsou ohraničené funkce na intervalu $[a, b]$ a množina bodů intervalu $[a, b]$, kde $f(x) \neq g(x)$ má míru nula.

Pak je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$, právě tehdy, když je funkce g je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Tedy hodnota integrálu z ohraničené funkce se nemění, pokud tuto funkci změníme na množině míry nula.

Důkaz.

Je podobného typu jako u věty 13, tzn. „škaredé“ intervaly nepokazí integrovatelnost funkce. □

Věta 15

Nechť f, g jsou integrovatelné na intervalu $[a, b]$. Pak na tomto intervalu jsou integrovatelné i funkce

$$f \pm g, \quad f \cdot g, \quad |f|, \quad |g|$$

a jestliže existuje $c > 0$ takové, že $|g(x)| \geq c$ pro $x \in [a, b]$, pak je na $[a, b]$ integrovatelná i funkce

$$\frac{f}{g}.$$

Důkaz.

Ukážeme integrovatelnost $f + g$. Necht' $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ je libovolné dělení intervalu $[a, b]$ a

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$n_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x),$$

$$N_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x),$$

$$p_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x) + g(x)),$$

$$P_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x) + g(x)).$$

Pak pro $i = 1, \dots, n$ platí

$$m_i + n_i \leq p_i \leq P_i \leq M_i + N_i.$$

Odtud

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (m_i + n_i)(x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n p_i(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n P_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (M_i + N_i)(x_i - x_{i-1}),\end{aligned}$$

$$s(D, f) + s(D, g) \leq s(D, f + g) \leq S(D, f + g) \leq S(D, f) + S(D, g),$$

$$\begin{aligned}\int_{\bar{a}}^b f(x)dx + \int_{\bar{a}}^b g(x)dx &\leq \int_{\bar{a}}^b (f(x) + g(x))dx \\ &\leq \int_a^b (f(x) + g(x))dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx.$$

□

Věta 16

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a nechť $[c, d] \subseteq [a, b]$. Pak je funkce f integrovatelná i na intervalu $[c, d]$.

Důkaz.

Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Pak existuje dělení D splňující $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$ (věta 10). Pokud čísla c, d nepatří do dělení D , přidáme je tam a výsledné dělení zúžíme na interval $[c, d]$. Tím vytvoříme dělení intervalu $[c, d]$

$$D_{cd} := \{D \cup \{c, d\}\} \cap [c, d],$$

které splňuje

$$S(D_{cd}, f) - s(D_{cd}, f) < S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Podle věty 10 je tedy funkce f integrovatelná na intervalu $[c, d]$. □

Věta 17

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a c je libovolné číslo z intervalu (a, b) . Pak funkce f je integrovatelná na každém z intervalů $[a, c]$, $[c, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Důkaz.

Přímo z definice.



Věta 18

Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak je na intervalu $[a, b]$ integrovatelná i funkce $\alpha f + \beta g$ a platí

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz.

Přímo z definice (viz důkaz věty 15).



Věta 19

Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a necht' platí $f(x) \leq g(x)$ pro $x \in [a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Důkaz.

Přímo z konstrukce integrálních součtů.



Věta 20

Nechť f je funkce integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Pak je zde integrovatelná i funkce $|f|$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Důkaz.

Viz skripta. □

Věta 21 (1. věta o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť funkce f, g jsou integrovatelné na intervalu $[a, b]$, $g(x)$ je nezáporná na $[a, b]$ (tj. $g(x) \geq 0, x \in [a, b]$) a označme

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Pak existuje číslo $\mu \in [m, M]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Zejména pokud je funkce f spojitá na $[a, b]$, existuje číslo $c \in [a, b]$ s vlastností, že

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Důkaz.

Ze značení věty plyne $m \leq f(x) \leq M$ pro $x \in [a, b]$. Protože $g(x) \geq 0$, platí $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, $x \in [a, b]$. Použitím vět 18 a 19 obdržíme

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Je-li $\int_a^b g(x)dx = 0$, potom $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ a tvrzení věty platí pro libovolné $\mu \in \mathbb{R}$.

Je-li $\int_a^b g(x)dx > 0$, potom $m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{:=\mu} \leq M$.

Tedy $m \leq \mu \leq M$ a $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

Je-li $f(x)$ spojitá, pak podle 2. Bolzanovy věty existuje $c \in [a, b] : f(c) = \mu$.



Důsledek

Položíme-li ve větě 21 funkci $g(x) \equiv 1$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

kde

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Poznámka

- Číslo $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ nazýváme *střední hodnota* funkce f na intervalu $[a, b]$.
- Dle předchozího důsledku a 2. Bolzanovy věty nabývá každá spojitá funkce f na intervalu $[a, b]$ své střední hodnoty.

Uvažujme funkci f integrovatelnou na intervalu $[a, b]$. Funkce f je (podle věty 16) integrovatelná i na libovolném intervalu typu $[a, x]$, $a < x \leq b$. Je tedy smysluplné definovat funkci $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in (a, b]$. Dodefinujeme-li navíc $F(a) = \int_a^a f(t)dt := 0$, rozšíříme tak definici na interval $[a, b]$. Funkci F nazýváme *funkce horní meze*.

Poznámka

Je samozřejmě možné podobně definovat i funkci dolní meze $G(x) = \int_x^b f(t)dt$, ale vzhledem k přepisu

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx - \int_a^x f(t)dt = K - F(x),$$

kde $K \in \mathbb{R}$ a F je funkce horní meze, je zřejmé, že vlastnosti jsou obdobné.

Věta 22

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Pak F je spojitá na intervalu $[a, b]$.

Důkaz.

Z integrovatelnosti f na $[a, b]$ plyne existence $K \geq 0$ takového, že $|f(x)| \leq K$ pro $x \in [a, b]$. Necht' $x_0 \in [a, b]$ je libovolné. Pak pro $x \in \mathcal{O}^+(x_0)$ platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{x \rightarrow x_0} |F(x) - F(x_0)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq \lim_{x \rightarrow x_0} K(x - x_0) = 0. \end{aligned}$$

Odtud $\lim_{x \rightarrow x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$, tedy funkce $F(x)$ je v x_0 spojitá zprava. Spojitost zleva podobně. □

Věta 23

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Pak funkce F má na intervalu (a, b) derivaci a platí $F'(x) = f(x)$, tj. F je primitivní k f na (a, b) .

Důkaz.

Nechť $x_0 \in (a, b)$ je libovolné a necht' $x > x_0$ (pro $x < x_0$ postupujeme analogicky). Označme

$$m(x) = \inf_{t \in (x_0, x)} f(t), \quad M(x) = \sup_{t \in (x_0, x)} f(t).$$

Protože f je spojitá na $[x_0, x]$, podle 2. Weierstrassovy věty existují $t_1, t_2 \in [x_0, x]$ takové, že $f(t_1) = m(x)$, $f(t_2) = M(x)$.

Jestliže $x \rightarrow x_0$, pak $t_1, t_2 \rightarrow x_0$ a tedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} m(x) = \lim_{t_1 \rightarrow x_0} f(t_1) = |f \text{ spojitá funkce}| = f(x_0)$$

a podobně

$$\lim_{x \rightarrow x_0} M(x) = \lim_{t_2 \rightarrow x_0} f(t_2) = f(x_0).$$

Pro derivaci zprava tedy platí

$$\begin{aligned} F'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} = \text{ | dle věty 21 |} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\mu(x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \mu(x) \\ &= \text{ | } m(x) \leq \mu(x) \leq M(x) \text{ | } = f(x_0), \end{aligned}$$

podobně pro derivaci zleva $F'_-(x_0) = f(x_0)$ a tedy $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Poznámka

Věta 23 je důkazem tvrzení, že ke spojité funkci existuje primitivní funkce (věta 4). Jednou z těchto primitivních funkcí je $\int_a^x f(t)dt$.

Poznámka

Je-li $G(x) = \int_x^b f(t)dt$, pak pro spojitou funkci f je $G'(x) = -f(x)$, neboť

$$G'(x) = \left[\int_a^b f(x)dx - \int_a^x f(t)dt \right]' = 0 - f(x) = -f(x).$$

Věta 24 (2. věta o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť funkce f je na intervalu $[a, b]$ integrovatelná a funkce g je na tomto intervalu monotónní. Pak existuje číslo $c \in [a, b]$ s vlastností

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx + g(b) \int_c^b f(x)dx.$$

Důkaz.

Předpokládejme, že g je neklesající (pro nerostoucí podobně). Naznačíme důkaz za silnějšího předpokladu, že funkce g má na intervalu $[a, b]$ derivaci a pro zjednodušení využijeme obsahu následující sekce (zvláště metodu per partes pro určitý integrál). Pro důkaz v plné obecnosti viz skripta.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \left| \begin{array}{ll} u = g(x) & u' = g'(x) \\ v' = f(x) & v = \int_a^x f(t)dt \end{array} \right| \\ &= \left[g(x) \int_a^x f(t)dt \right]_a^b - \int_a^b g'(x) \left(\int_a^x f(t)dt \right) dx. \end{aligned}$$

Pomocí 1. věty o střední hodnotě integrálního počtu lze psát pro

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$\int_a^b g'(x)F(x)dx = F(c) \int_a^b g'(x)dx = [g(b) - g(a)] \int_a^c f(t)dt,$$

kde $c \in [a, b]$.

Tedy

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= g(b) \int_a^b f(t)dt - [g(b) - g(a)] \int_a^c f(t)dt \\ &= g(a) \int_a^c f(x)dx + g(b) \int_c^b f(x)dx.\end{aligned}$$



Definice 10

Nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Pak $K = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ se nazývá *výběr reprezentantů dělení D* a součet

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =: S(D, f, K)$$

se nazývá *integrální součet funkce f* příslušný dělení D a výběru reprezentantů K .

Poznámka

Pro každý výběr reprezentantů K a každé dělení D platí

$$s(D, f) \leq S(D, f, K) \leq S(D, f).$$

Věta 25

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a D_n je libovolná nulová posloupnost dělení tohoto intervalu. Pak pro každý výběr reprezentantů K_n dělení D_n platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(D_n, f, K_n) = \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz.

Plyne přímo z nerovnosti

$$\underbrace{s(D_n, f)}_{\rightarrow \int_a^b f(x) dx} \leq \mathcal{S}(D_n, f, K_n) \leq \underbrace{S(D_n, f)}_{\rightarrow \int_a^b f(x) dx}.$$



Věta 26 (Newtonův-Leibnizův vzorec)

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$, funkce F je spojitá na $[a, b]$ a na (a, b) je primitivní funkcí k f , tj. $F' = f$ na (a, b) . Pak platí

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Důkaz.

Nechť $D = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ je libovolné dělení intervalu $[a, b]$, pak platí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] &= \\ &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Současně podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i), F'(\xi_i) = f(\xi_i).$$

Tedy pro libovolné dělení D máme

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}(D, f, K),$$

kde $K = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$.

Nechť D_n je nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ a K_n je příslušející výběr reprezentantů, který dostaneme aplikací Lagrangeovy věty na každý dílek dělení D_n , pak

$$F(b) - F(a) = S(D_n, f, K_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$



Věta 27 (Metoda per partes pro Riemannův integrál)

Nechť funkce u, v jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a jejich derivace u', v' jsou integrovatelné na tomto intervalu. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx,$$

kde $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Důkaz.

$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv$ je primitivní funkcí k $u'v + uv'$, tedy

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$



Věta 28 (Substituční metoda pro Riemannův integrál)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[\alpha, \beta]$ a nechť funkce φ má derivaci na intervalu $[a, b]$ a tato derivace φ' je na $[a, b]$ integrovatelná. Nechť dále $\varphi([a, b]) \subseteq [\alpha, \beta]$. Pak platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Důkaz.

Protože f je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a φ' integrovatelná na $[a, b]$, je funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ integrovatelná na $[a, b]$. Uvažujme funkci

$$F(x) := \int_{\alpha}^x f(t)dt, \quad x \in [\alpha, \beta],$$

která je (věta 23) primitivní k funkci f na $[\alpha, \beta]$. Dále funkce $F(\varphi(x))$ je primitivní k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na $[a, b]$ (dle věty o derivaci složené funkce). Tedy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\alpha}^{\varphi(b)} f(t)dt - \int_{\alpha}^{\varphi(a)} f(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt. \end{aligned}$$



Poznámka

Při substituční metodě pro Riemannův (určitý) integrál se musí transformovat i meze.

Příklad 36

$$\int_{-2}^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{133}{3}.$$

Příklad 37

$$\begin{aligned}\int_1^3 x \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx \\&= \left(\frac{9}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 1 \right) - \frac{1}{2} \int_1^3 x dx \\&= \frac{9}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{2} \ln 3 - 2\end{aligned}$$

Příklad 38

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx & \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| \\ &= [x \operatorname{arctg} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Příklad 39

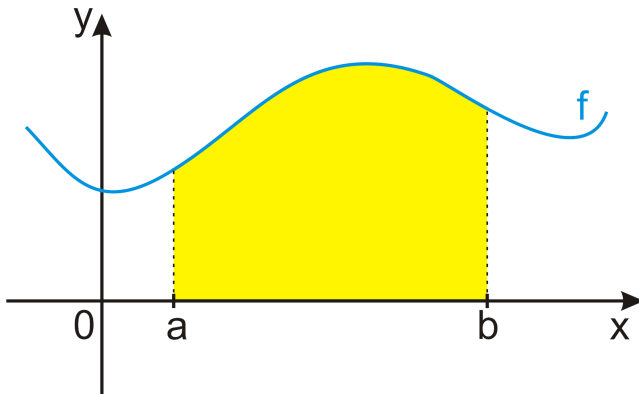
$$\begin{aligned}\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx &= \left| \begin{array}{ll} 1+x^2 = t^2 & x=2 \Rightarrow t=\sqrt{5} \\ xdx = tdt & x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2} \end{array} \right| \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Příklad 40

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} x = \sin t & x = 1 \Rightarrow t = \pi/2 \\ dx = \cos t dt & x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

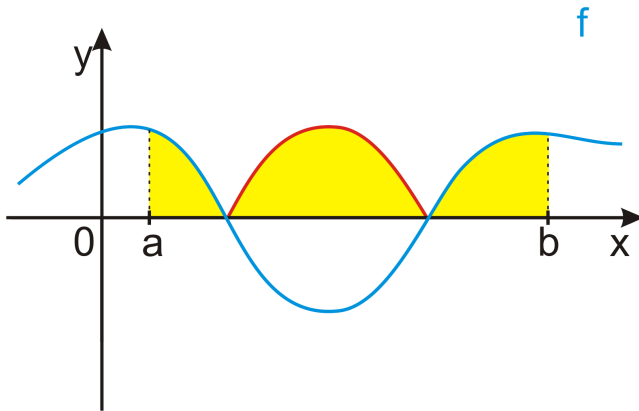
Plocha podgrafu kladné funkce na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx.$$



Plocha mezi grafem funkce f a osou x na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$

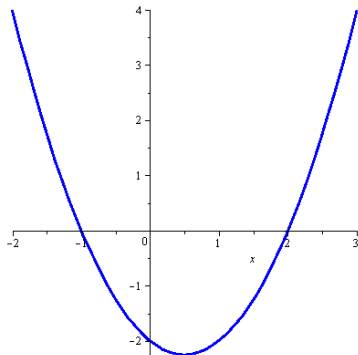


Příklad 41

Určete plochu ohraničenou grafem funkce $f(x) = x^2 - x - 2$ a osou x na intervalu $I = [-2, 3]$.

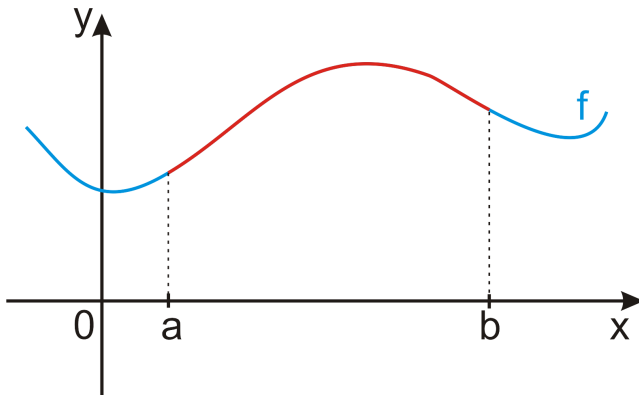
Protože $x^2 - x - 2 = 0$ má kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, snadno zjistíme, že funkce f je na intervalu I kladná pro $x \in (-2, -1) \cup (2, 3)$ a záporná pro $x \in (-1, 2)$.

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^3 |f(x)| dx \\ &= \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^2 (-f(x)) dx \\ &\quad + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \dots = \frac{49}{6} \end{aligned}$$

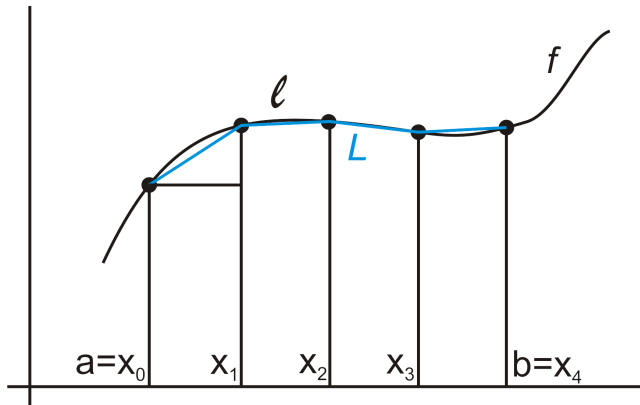


Délka křivky grafu funkce f na intervalu $[a, b]$.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$



Délka křivky – odvození



Křivku ℓ nahradíme lomenou čarou L , která vznikla dělením intervalu $[a, b]$. Předpokládejme, že f je na $[a, b]$ diferencovatelná a že funkce $\sqrt{1 + f'^2}$ je na něm integrovatelná.

Pak délka lomené čáry je

$$d(L) = \sum_{i=1}^n \sqrt{[f(x_i) - f(x_{i-1})]^2 + (x_i - x_{i-1})^2}.$$

Dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existují $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \dots, n$ taková, že $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$. Tedy

$$d(L) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} (x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}(D, \sqrt{1 + f'^2}, K).$$

Výše uvedené platí pro libovolné dělení D , platí tedy i pro nulovou posloupnost dělení D_n

$$d(L) = \mathcal{S}(D_n, \sqrt{1 + f'^2}, K_n) \longrightarrow \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

tedy $d(\ell) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

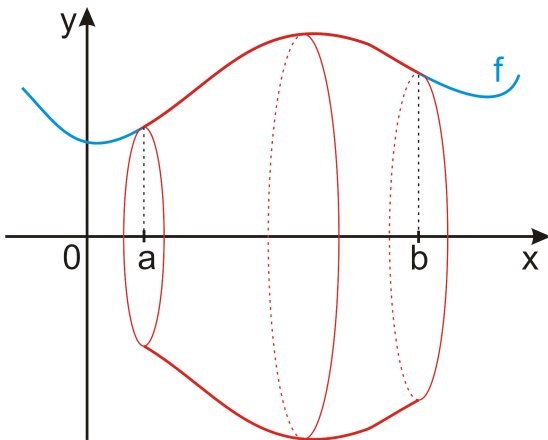
Příklad 42

Odvoďte vzorec pro výpočet obvodu kruhu o poloměru R .

$$\begin{aligned} O &= 4 \int_0^R \sqrt{1 + \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)' ^2} dx = 4 \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= 4 \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4 \left[R \arcsin \frac{x}{R} \right]_0^R = 4R \frac{\pi}{2} = 2\pi R \end{aligned}$$

Objem a povrch pláště rotačního tělesa
(rotace nezáporné funkce f kolem osy x na intervalu $[a, b]$).

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Vzorec pro objem rotačního tělesa plyne přímo z konstrukce integrálu. Uvažujme dělení intervalu $[a, b]$, v každém dílku zvolíme reprezentanta ξ_i . Tím obdržíme obdélník daný délkou dílku a funkční hodnotou v příslušném reprezentantu. Rotujeme-li tento obdélník kolem osy x , vytvoří válec o poloměru $f(\xi_i)$ a výšce $x_i - x_{i-1}$. Součet všech objemů přejde pro nulovou posoupnost dělení v objem uvažovaného rotačního tělesa.

$$V \approx \sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}(D, \pi f^2, K) \longrightarrow \boxed{\pi \int_a^b f^2(x) dx = V}$$

Podobně lze odvodit vzorec pro povrch pláště – nahradíme-li křivku za lomenou čáru, objekt snadno rozdělíme na sadu komolých kuželů. Součet povrchů pláště těchto kuželů se pro nulové dělení blíží k povrchu pláště daného tělesa.

Příklad 43

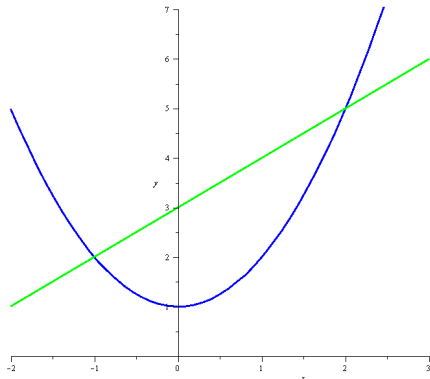
Vypočtete povrch koule o poloměru R .

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4\pi R \int_0^R dx = 4\pi R^2$$

Příklad 44

Určete plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$.

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\x^2 + 1 &= x + 3 \\x^2 - x - 2 &= 0 \\x_1 &= -1, x_2 = 2\end{aligned}$$

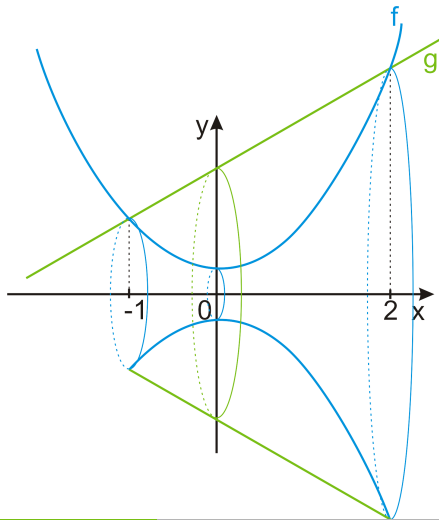


$$\int_{-1}^2 g(x) - f(x) dx = \int_{-1}^2 (x+3) - (x^2+1) dx = \int_{-1}^2 2+x-x^2 dx = \dots = \frac{9}{2}.$$

Příklad 45

Určete objem tělesa vzniklého rotací plochy omezené grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$ kolem osy x .

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^2 g^2(x) dx - \pi \int_{-1}^2 f^2(x) dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 (x+3)^2 - (x^2+1)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 8 + 6x - x^2 - x^4 dx \\ &= \dots = \frac{117}{5} \pi. \end{aligned}$$



V této sekci budeme uvažovat křivku zadanou parametricky jako

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (\text{P})$$

kde φ, ψ jsou spojitě diferencovatelné a $\varphi'(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$.

Obsah obrazce ohraničeného křivkou s parametrizací (P), osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ je

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) |\varphi'(t)| dt.$$

Délka křivky zadané parametrizací (P) je

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací podgrafu spojitě nezáporné funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$, kolem osy y je

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametrizací (P) kolem osy x (kde $\psi(t) \geq 0$, $t \in [\alpha, \beta]$), osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha)$, $x = \varphi(\beta)$ je

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \cdot |\varphi'(t)| dt.$$

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametrizací (P) (kde $\psi(t) \geq 0$, $t \in [\alpha, \beta]$), osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha) \geq 0$, $x = \varphi(\beta) \geq 0$ kolem osy y je

$$V_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi(t) |\varphi'(t)| dt.$$

Obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametrizací (P) (kde $\psi(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]$), osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ kolem osy x je

$$Q = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[\varphi(t), \psi(t)]$ pro křivku zadanou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} s(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

je *hmotnost křivky*,

$$S_x = \int_{\alpha}^{\beta} s(t) \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

$$S_y = \int_{\alpha}^{\beta} s(t) \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

jsou *statické momenty* křivky vzhledem k ose x , resp. y a

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M} \right]$$

jsou *souřadnice jejího těžiště*.

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[x, f(x)]$ pro křivku, která je grafem spojitě diferencovatelné funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$.
Potom platí

$$M = \int_a^b s(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx,$$

$$S_x = \int_a^b s(x) f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx,$$

$$S_y = \int_a^b s(x) x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx,$$

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M} \right].$$

Nechť spojitá funkce $s(t)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[\varphi(t), \psi(t)]$. Pro rovinný obrazec vymezený křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha)$, $x = \varphi(\beta)$ platí

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} s(t) \psi(t) |\varphi'(t)| dt,$$

$$S_x = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} s(t) \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt,$$

$$S_y = \int_{\alpha}^{\beta} s(t) \psi(t) \varphi(t) |\varphi'(t)| dt,$$

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M} \right].$$

Nechť spojitá funkce $s(x)$ udává *specifickou hmotnost* v bodě $[x, y]$ podgrafu spojitě nezáporné funkce f . Potom pro podgraf funkce f platí

$$M = \int_a^b s(x)f(x)dx,$$

$$S_x = \frac{1}{2} \int_a^b s(x)f^2(x)dx,$$

$$S_y = \int_a^b xs(x)f(x)dx,$$

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M} \right].$$

Cílem této sekce je „zbavit se“ požadavku
na ohraničenost integrandu a intervalu.

Nejprve se budeme zabývat případem,
kdy je neohraničený interval...

Definice 11

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, \infty)$, která je integrovatelná na každém intervalu $[a, b]$, kde $b > a$. Definujme funkci F na intervalu $[a, \infty)$ vztahem

$$F(b) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Jestliže existuje vlastní limita $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x) \, dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$ říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x) \, dx$ *diverguje*. Je-li tato limita nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál *určitě diverguje* k $\pm\infty$. V případě, že tato limita neexistuje, říkáme, že integrál *osciluje*.

Poznámka

Nevlastní integrál $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, kde $a \in \mathbb{R}$, definujeme analogicky

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx.$$

Je-li funkce f integrovatelná na každém omezeném intervalu, řekneme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konverguje, jestliže pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ (tedy pro každé $a \in \mathbb{R}$) konvergují oba nevlastní integrály $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, $\int_a^{\infty} f(x) dx$. V tomto případě

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Příklad 46

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\operatorname{arctg} x]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 47

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

Příklad 48

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\sin x]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b = \text{neexistuje}.$$

Věta 29

Nechť integrály $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergují a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak konverguje i integrál $\int_a^\infty \alpha f(x) + \beta g(x)dx$ a platí

$$\int_a^\infty \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^\infty f(x)dx + \beta \int_a^\infty g(x)dx.$$

Věta 30

Nechť integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje a integrál $\int_a^\infty g(x)dx$ diverguje. Pak integrál $\int_a^\infty f(x) \pm g(x)dx$ diverguje.

Příklad 49

Rozhodněte pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ konverguje a pro která diverguje.

Nechť $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$. Je-li $\alpha \neq 1$, je

$$F(x) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right),$$

tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{je-li } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha < 1. \end{cases}$$

Pro $\alpha = 1$ je $F(x) = [\ln t]_1^x = \ln x$, tedy $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$.

Celkem

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{je-li } \alpha > 1, \text{ integrál konverguje,} \\ \infty, & \text{je-li } \alpha \leq 1, \text{ integrál určitě diverguje.} \end{cases}$$

Věta 31 (Cauchyho–Bolzanovo kritérium)

Nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x) \, dx$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \geq a$ tak, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$, $x > x_0$, $y > x_0$, platí

$$\left| \int_x^y f(t) \, dt \right| < \varepsilon.$$

Věta 32 (Prosté srovnávací kritérium)

Nechť funkce f, g splňují pro $x \in [a, \infty)$ nerovnosti $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

- (i) Konverguje-li integrál $\int_a^\infty g(x) dx$, konverguje i integrál $\int_a^\infty f(x) dx$, přičemž platí

$$0 \leq \int_a^\infty f(x) dx \leq \int_a^\infty g(x) dx.$$

- (ii) Diverguje-li integrál $\int_a^\infty f(x) dx$, diverguje i integrál $\int_a^\infty g(x) dx$.

Věta 33 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť funkce f, g jsou nezáporné na intervalu $[a, \infty)$ a necht' existuje

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

- (i) Je-li $L < \infty$ a konverguje-li nevlastní integrál $\int_a^\infty g(x) dx$, konverguje i nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x) dx$.
- (ii) Je-li $L > 0$ a diverguje-li nevlastní integrál $\int_a^\infty g(x) dx$, diverguje i nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x) dx$.

Důsledek

Nechť $a > 0$ a $f(x) \geq 0$ pro $x \in [a, \infty)$. Jestliže existuje $\alpha > 1$ takové, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) < \infty,$$

pak integrál $\int_a^\infty f(x) dx$ konverguje. Jestliže existuje $\alpha \leq 1$ takové, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) > 0,$$

pak nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x) dx$ diverguje.

Poznámka

Je-li funkce f nezáporná, pak je funkce $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ neklesající, a tedy existuje (vlastní nebo nevlastní) limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x).$$

Věta 34 (Nutná podmínka konvergence)

Nechť integrál $\int_a^\infty f(x) \, dx$ konverguje a necht' existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$. Pak je $c = 0$.

Důkaz.

Předpokládejme sporem, že je $c \neq 0$, např. $c > 0$. Podle definice limity, k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje x_0 takové, že pro $x > x_0$ je $f(x) \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Zvolíme-li $\varepsilon < c$, tj. $c - \varepsilon > 0$, pak pro $x > x_0$ je $f(x) > c - \varepsilon$. Protože platí $\int_{x_0}^{\infty} dx = \infty$, tudíž i $\int_{x_0}^{\infty} (c - \varepsilon) dx = \infty$, dostáváme ze srovnávacího kritéria divergenci integrálu $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx$ a tedy i $\int_a^{\infty} f(x) dx = \infty$, což je spor. Podobně dojdeme ke spornému závěru $\int_a^{\infty} f(x) dx = -\infty$ v případě $c < 0$. □

Věta 35 (Abelovo kritérium)

Nechť nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x) dx$ konverguje a nechť je funkce g monotónní a ohraničená na intervalu $[a, \infty)$. Pak nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x) g(x) dx$ také konverguje.

Věta 36 (Dirichletovo kritérium)

Nechť existuje číslo $k > 0$ takové, že platí

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq k$$

pro každé $b > a$, nechť g je monotónní funkce na intervalu $[a, \infty)$ a nechť platí $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Pak integrál $\int_a^\infty f(x) g(x) dx$ konverguje.

Věta 37

Konverguje-li integrál $\int_a^\infty |f(x)| dx$, konverguje i integrál $\int_a^\infty f(x) dx$ a platí

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx.$$

Definice 12

Říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x) \, dx$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje integrál $\int_a^\infty |f(x)| \, dx$. Pokud ale integrál $\int_a^\infty f(x) \, dx$ konverguje a integrál $\int_a^\infty |f(x)| \, dx$ (určitě) diverguje, říkáme, že integrál $\int_a^\infty f(x) \, dx$ *konverguje neabsolutně*.

Věta 38

Nechť funkce g je nezáporná na intervalu $[a, \infty)$ a nechť integrál $\int_a^\infty g(x) \, dx$ konverguje. Platí-li $|f(x)| \leq g(x)$ pro všechna $x \in [a, \infty)$ nebo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty,$$

pak integrál $\int_a^\infty f(x) \, dx$ *konverguje absolutně*.

Nyní se budeme zabývat případem neohraničené funkce...

Definice 13

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$. Řekneme, že b je *singulární bod* funkce f , jestliže f je ohraničená na každém intervalu $[a, b - \varepsilon]$, kde $0 < \varepsilon < b - a$, není ohraničená v žádném levém okolí bodu b , tj. na intervalu $(b - \varepsilon, b]$, a je integrovatelná (v Riemannově smyslu) na každém intervalu $[a, b - \varepsilon]$.

Definice 14

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$ a necht' b je jejím singulárním bodem. Necht' funkce F je definovaná na intervalu $[a, b)$ předpisem $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Existuje-li *vlastní* limita $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$, řekneme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x) dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x).$$

Neexistuje-li vlastní $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$, říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x) dx$ *diverguje*. Je-li tato limita nevlastní, říkáme, že nevlastní integrál *určitě diverguje* k $\pm\infty$. V případě, že tato limita neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *osciluje*.

Poznámka

Analogicky definujeme singulární bod a funkce f definované na intervalu $(a, b]$ a konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu $\int_a^b f(x) dx$, je-li a singulárním bodem funkce f .

Příklad 50

Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ pro $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Singulárním bodem funkce $\frac{1}{x^\alpha}$ je bod 0. Položme $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$. Pro $\alpha \neq 1$ je

$$F(x) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right).$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{je-li } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha > 1. \end{cases}$$

V případě $\alpha = 1$ obdržíme $F(x) = [\ln t]_x^1 = -\ln x$, tudíž v tomto případě platí $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \infty$. Celkem

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{je-li } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{je-li } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Pro nevlastní integrály typu $\int_a^b f(x) dx$, kde $a < b$ a b je singulárním bodem funkce f , platí tvrzení analogická k tvrzením předchozí sekce. Důkazy se provedou naprosto shodným způsobem. Např.

Věta 39 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť f, g jsou nezáporné funkce definované na intervalu $[a, b)$. Nechť b je singulárním bodem obou funkcí f, g a nechť existuje $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

- (i) Je-li $L < \infty$ a konverguje-li integrál $\int_a^b g(x) dx$, je také integrál $\int_a^b f(x) dx$ konvergentní.*
- (ii) Je-li $L > 0$ a diverguje-li integrál $\int_a^b g(x) dx$, je také integrál $\int_a^b f(x) dx$ divergentní.*

Definice 15

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a necht' f je funkce definovaná na intervalu (a, b) .
Necht' platí

- (i) existuje primitivní funkce F k funkci f na (a, b) ,
- (ii) existují *vlastní limity* $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = B$.

Pak říkáme, že funkce f je na intervalu (a, b) *integrovatelná v Newtonově smyslu*, a definujeme její *Newtonův integrál* přes interval (a, b) vztahem

$$(\mathcal{N}) \int f(x) dx = B - A.$$

Pro daný interval (a, b) , kde $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, označíme symbolem $\mathcal{N}((a, b))$ množinu všech funkcí integrovatelných na (a, b) v Newtonově smyslu a symbolem $\mathcal{R}([a, b])$ množinu všech funkcí integrovatelných v Riemannově smyslu na $[a, b]$.

Věta 40

Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}((a, b))$. Pak

$$(\mathcal{R}) \int f(x) dx = (\mathcal{N}) \int f(x) dx.$$

Důkaz.

Z Newton–Leibnizovy formule. □

Věta 41

Nechť $f \in \mathcal{N}((a, b))$. Pak má funkce f na intervalu (a, b) Darbouxovu vlastnost.

Poznámka

Pokud existuje $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)dx$, potom je f omezená.

Pokud existuje $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)dx$, potom má f Darbouxovu vlastnost.

$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)dx$ existuje v Riemannově smyslu (ohraničená s jediným bodem nespojitosti), ale ne v Newtonově (nemá Darbouxovu vlastnost).

$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ neexistuje (jako vlastní) v Riemannově smyslu (neohraničená funkce), ale

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{N}) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{[a,b] \rightarrow [-1,1]} [\arcsin x]_a^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow 1^-} (\arcsin b) - \lim_{a \rightarrow -1^+} (\arcsin a) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.
 \end{aligned}$$

Je-li funkce spojitá na $[a, b]$, pak zde oba integrály existují a jsou si rovny.

Pro Newtonův integrál platí „obvyklé“ věty jako pro Riemannův, ale ne všechny. Např. jsou-li funkce f, g Riemannovsky integrovatelné na intervalu $[a, b]$, je na něm integrovatelná i funkce $f \cdot g$. To pro Newtonův integrál neplatí.

Nechť $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Potom

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} (2\sqrt{b}) - \lim_{a \rightarrow 0^+} (2\sqrt{a}) = 2,$$

ale

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} (\ln b) - \lim_{a \rightarrow 0^+} (\ln a)$$

neexistuje (vlastní).