

Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy



1 Konstrukce

- Jordanova míra
- Konstrukce Riemannova integrálu

2 Výpočet Riemannova integrálu

- Základní postup
- Transformace dvojného a trojného integrálu
- Nevlastní vícerozměrné integrály
 - Nevlastní integrál z neohraničené funkce
 - Nevlastní integrál na neomezené množině
- Integrály závislé na parametru
- Eulerova Gamma funkce

3 Křivkový integrál

- Křivkový integrál prvního druhu (KI ze skalární funkce)
- Křivkový integrál druhého druhu (KI z vektorového pole)
- Greenova věta a nezávislost na integrační cestě
- Křivkový integrál v prostoru

4 Plošný integrál

- Motivace, diferenciální geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$
- Plošný integrál prvního a druhého druhu
- Gaussova–Ostrogradského a Stokesova věta

$$n = 1 : \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \quad F' = f$$

$$n = 2 : \quad D \subseteq \mathbb{R}^2, f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \iint_D f(x, y) \, dx \, dy = ?$$

$$n = 3, 4, \dots$$

Podmnožině $\mathbb{R}^n$ přiřadíme reálné číslo.

Pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ značí $m(A)$ *míru množiny A* (tj. $m(\cdot)$ je zobrazení z množiny podmnožin $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$)).

Míra by měla splňovat (přirozené) podmínky pro (měřitelné) $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

- $A = B \Rightarrow m(A) = m(B)$
- $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

V poslední podmínce se někdy nahrazuje $A \cap B = \emptyset$ za slabší podmínku $m(A \cap B) = 0$ (platnost dokážeme jako Větu 3). Pojem míry sjednocuje a zobecňuje pojem obsahu a objemu množin z $\mathbb{R}^n$, je tedy také přirozené očekávat např. v $\mathbb{R}^2$, že $m([0, 1] \times [0, 1]) = 1$.

Formálně množinovou funkci $m(\cdot)$ nazýváme mírou, jestliže

- ❶ $m(\emptyset) = 0$,
- ❷ $m(A) \geq 0 \quad \forall A$ (nezápornost),
- ❸ $A_n, n \in M \subseteq \mathbb{N}$, po dvou disjunktní množiny, pak

$$m\left(\bigcup A_n\right) = \sum m(A_n).$$

Jestliže vztah platí pro spočetnou množinu M , tedy lze i $M = \mathbb{N}$, pak mluvíme o spočetné aditivitě, neboli σ -aditivitě, pokud platí jen pro konečné počty množin A_n , jedná se o konečnou aditivitu.

Definice 1

Nechť $n, j, k \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Množinu

$$W_{j,k}^n = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{j}{2^n} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

nazýváme *čtverec řádu n* .

- Množinu všech čtverců řádu n nazýváme *síť řádu n* .
- Síť řádu 0 nazýváme *základní síť*.
- Konečné sjednocení čtverců řádu n nazýváme *elementární množina řádu n* .
- Číslo $m(W_{j,k}^n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4^n}$ nazýváme *mírou čtverce řádu n* .
- *Míra elementární množiny řádu n* je součtem měr všech čtverců, které ji tvoří.
- Klademe $m(\emptyset) = 0$.

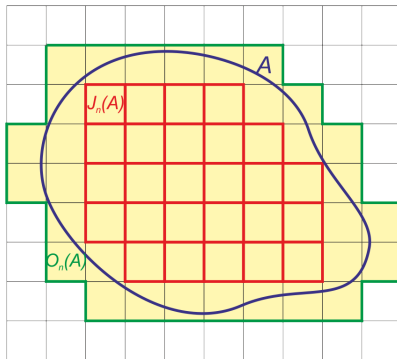
Poznámka

- Často nezáleží na konkrétní poloze daného čtverce a dolní indexy se proto vynechávají.
- Každý čtverec řádu n je sjednocením čtyř čtverců řádu $n + 1$, tedy platí

$$m(W^n) = 4 \cdot m(W^{n+1}).$$

Definice 2

- **Jádro** řádu n omezené množiny A , označíme $J_n(A)$, je elementární množina řádu n tvořená čtverci, které jsou podmnožinami vnitřku množiny A .
- **Obal** řádu n omezené množiny A , označíme $O_n(A)$, je elementární množina řádu n tvořená čtverci, které mají neprázdný průnik s uzávěrem množiny A .



Platí

$$J_n(A) \subseteq J_{n+1}(A), \quad O_n(A) \supseteq O_{n+1}(A),$$

tedy

$$m(J_n(A)) \leq m(J_{n+1}(A)), \quad m(O_n(A)) \geq m(O_{n+1}(A)).$$

Dále platí $\forall n, m \in \mathbb{N} : J_n(A) \subseteq O_m(A)$, neboť

$$J_n(A) \subseteq A^\circ \subseteq \overline{A} \subseteq O_m(A) \Rightarrow m(J_n(A)) \leq m(O_m(A)).$$

Odtud ihned dostáváme, že posloupnost $m(J_n(A))$ je neklesající a shora ohraničená. Podobně posloupnost $m(O_n(A))$ je nerostoucí a zdola ohraničená.

Tedy existují konečné limity

$$m_*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(J_n(A)), \quad m^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(O_n(A)).$$

$m_*(A)$ se nazývá *dolní (vnitřní) Jordanova míra* a $m^*(A)$ se nazývá *horní (vnější) Jordanova míra*.

Samozřejmě platí

$$0 \leq m_*(A) \leq m^*(A).$$

Definice 3

Řekneme, že omezená množina A je *Jordanovsky měřitelná* (dále jen měřitelná), pokud $m_*(A) = m^*(A)$, a definujeme její Jordanovu míru jako

$$m(A) = m_*(A) = m^*(A).$$

Poznámka

- ❶ Pokud $m^*(A) = 0$, je A měřitelná a $m(A) = 0$, neboť $m_*(A) \geq 0$ a $m_*(A) \leq m^*(A)$, což platí pro každou omezenou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^2$.
- ❷ Pokud je A tvořena konečným počtem bodů v rovině, pak $m(A) = 0$.
- ❸ V teorii Riemannova integrálu bylo uvedeno tvrzení:
Funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ s normou $\nu(D) < \delta$ platí

$$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Podobné tvrzení platí pro míru:

Omezená množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : m(O_n(A)) - m(J_n(A)) < \varepsilon.$$

Budeme používat značení

- A° = vnitřek množiny A ,
- $\overline{A}$ = uzávěr množiny A ,
- $h(A)$ = hranice množiny A ,
- A^c = doplněk množiny A .

Příklad 1

Nechť $A = [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$, tj. body z jednotkového čtverce s racionálními souřadnicemi, pak A není měřitelná.

$$A^\circ = \emptyset, m_*(A) = 0, \overline{A} = [0, 1]^2$$

$$\Rightarrow m(O_n(A)) \geq 1 \quad (\overline{A} \subseteq O_n(A)) \quad \Rightarrow \quad m^*(A) \geq 1$$

Věta 1

Omezená množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když $m(h(A)) = 0$.

Důkaz.

Tvrzení plyne z rovnosti

$$\underbrace{m(O_n(A))}_{\rightarrow m^*(A)} = \underbrace{m(J_n(A))}_{\rightarrow m_*(A)} + \underbrace{m(O_n(h(A)))}_{m^*(h(A))}$$

pro $n \rightarrow \infty$, $\bar{A} = A^\circ \cup h(A)$.



Věta 2

Nechť A, B jsou měřitelné množiny, pak množiny

$$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$$

jsou také měřitelné.

Důkaz.

A, B jsou měřitelné, tedy $m(h(A)) = 0 = m(h(B))$.

- $h(A \cup B) \subseteq h(A) \cup h(B) \Rightarrow$
 $0 \leq m^*(h(A \cup B)) \leq m^*(h(A)) + m^*(h(B)) = 0 \Rightarrow A \cup B$ je měřitelná.
- $h(A \setminus B) = h(A \cap B^c) \subseteq h(A) \cup h(B^c) = h(A) \cup h(B)$
 $\Rightarrow 0 \leq m^*(h(A \setminus B)) \leq m^*(h(A)) + m^*(h(B)) = 0$
 $\Rightarrow A \setminus B$ je měřitelná.
- $h(A \cap B) \subseteq h(A) \cup h(B) \Rightarrow m^*(h(A \cap B)) = 0 \Rightarrow A \cap B$ je měřitelná.



Poznámka

Jestliže $A_1, \dots, A_n$ jsou měřitelné množiny, pak množina $A_1 \cup \dots \cup A_n$ je měřitelná.

Toto tvrzení neplatí pro spočetná sjednocení!

Hlavní nevýhodou Jordanovy míry je, že je pouze konečně aditivní, ale není spočetně aditivní. Např. $A = [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ je spočetná, míra jednobodové množiny je nula, přitom A není měřitelná.

Věta 3

Jsou-li A, B měřitelné a $m(A \cap B) = 0$, pak

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Důkaz.

Předpokládejme, že $A \cap B = \emptyset$, pak

$$m_*(A) + m_*(B) \leq m_*(A \cup B) \leq m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B),$$

tedy vzhledem k měřitelnosti A a B máme

$$m(A) + m(B) \leq m_*(A \cup B) \leq m^*(A \cup B) \leq m(A) + m(B).$$

Nechť platí pouze předpoklady věty, zejména $m(A \cap B) = 0$. Máme $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, přičemž $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, tedy víme, že

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A). \quad (1)$$

Jistě platí $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, kde $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$, tedy

$$m(B) = m(B \setminus A) + m(A \cap B). \quad (2)$$

Odečtením rovnice (2) od rovnice (1) obdržíme

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$



Lemma 1

Jordanova míra rovnoběžníku R o straně a s výškou v_a je

$$m(R) = a \cdot v_a.$$

Lemma 2

Jordanova míra rovnoběžníku R daného vektory $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ je rovna absolutní hodnotě determinantu

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Je-li $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení, pak existuje matice $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$ taková, že

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} L \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Věta 4 (Závislost míry na lineární transformaci)

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná, $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je regulární lineární zobrazení a L je libovolná matice reprezentující toto zobrazení. Pak množina $\mathcal{L}(A)$ je měřitelná a

$$m(\mathcal{L}(A)) = |\det L| \cdot m(A).$$

Regulární lineární zobrazení: $\det L \neq 0$.

Důkaz.

Lineární zobrazení transformuje systém rovnoběžných stejně vzdálených přímek na jiný systém rovnoběžných stejně vzdálených přímek, tj. síť čtverců řádu n je transformována na soustavu shodných rovnoběžníků. Potřebujeme tedy nejprve určit $m(L(W^n))$ (např. $m(L(W_{0,0}^n))$).

Čtverec $W_{0,0}^n$ je dán vektory $(2^{-n}, 0)$, $(0, 2^{-n})$ a rovnoběžník $L(W_{0,0}^n)$ je dán vektory $u = \left(\frac{\ell_{11}}{2^n}, \frac{\ell_{21}}{2^n}\right)$, $v = \left(\frac{\ell_{12}}{2^n}, \frac{\ell_{22}}{2^n}\right)$, tedy

$$m(L(W_{0,0}^n)) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\ell_{11}}{2^n} & \frac{\ell_{12}}{2^n} \\ \frac{\ell_{21}}{2^n} & \frac{\ell_{22}}{2^n} \end{array} \right| = \frac{1}{2^{2n}} |\det L| = m(W_{0,0}^n) |\det L|.$$

Předpokládejme, že se jádro $J_n(A)$ množiny A skládá z k čtverců řádu n . Protože z $J_n(A) \subseteq A$ plyne $\mathcal{L}(J_n(A)) \subseteq \mathcal{L}(A)$, máme

$$m_*(\mathcal{L}(A)) \geq m_*(\mathcal{L}(J_n(A))) = m_* \left(\mathcal{L} \left(\bigcup_{(p,q) \in I} W_{p,q}^n \right) \right),$$

kde I je k -prvková množina dvojic celých čísel. Jistě platí

$$\bigcup_{(p,q) \in I} \mathcal{L}(W_{p,q}^n) \subseteq \mathcal{L} \left(\bigcup_{(p,q) \in I} W_{p,q}^n \right).$$

Každá z množin $\mathcal{L}(W_{p,q}^n)$ je měřitelná a vzájemně mají společnou nejvýše hranici o míře nula.

Tím dostáváme

$$\begin{aligned}
 m_*(\mathcal{L}(A)) &\geq m_*\left(\mathcal{L}\left(\bigcup_{(p,q)\in I} W_{p,q}^n\right)\right) \geq m_*\left(\bigcup_{(p,q)\in I} \mathcal{L}(W_{p,q}^n)\right) \\
 &= \sum_{(p,q)\in I} m(\mathcal{L}(W_{p,q}^n)) = \sum_{(p,q)\in I} |\det L| m(W_{p,q}^n) \\
 &= |\det L| \sum_{(p,q)\in I} m(W_{p,q}^n) = |\det L| m(J_n(A)).
 \end{aligned}$$

Analogicky platí

$$m^*(\mathcal{L}(A)) \leq |\det L| m(O_n(A)).$$

Celkem tedy máme

$$|\det L| m(J_n(A)) \leq m_*(\mathcal{L}(A)) \leq m^*(\mathcal{L}(A)) \leq |\det L| m(O_n(A)).$$

Nyní stačí použít limitní přechod $n \rightarrow \infty$ a větu o třech limitách. □

Poznámka

$\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \|x\| = \|\mathcal{L}x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^2$ (izometrie), $\mathcal{L} : Lx + q$ a platí $\langle x, y \rangle = \langle Lx, Ly \rangle = \langle x, L^T Ly \rangle = \langle x, y \rangle$ (L je ortogonální matice), tedy Jordanova míra je invariantní vzhledem k ortogonálnímu zobrazení ($m(\mathcal{L}(A)) = m(A)$).

Poznámka

Jordanovu míru v $\mathbb{R}^k$ pro $k \in \mathbb{N}$ lze konstruovat analogicky s použitím k -rozměrných krychlí řádu n

$$W_{m_1, \dots, m_k}^n = \left\{ [x_1, \dots, x_k] \in \mathbb{R}^k : \frac{m_1}{2^n} \leq x_1 \leq \frac{m_1 + 1}{2^n}, \dots \right. \\ \left. \dots \frac{m_k}{2^n} \leq x_k \leq \frac{m_k + 1}{2^n} \right\}$$

s Jordanovou mírou $m(W^n) = \frac{1}{2^{kn}}$.

Věta 5

Nechť funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je na uzavřeném intervalu $[a, b]$ spojitá, pak její graf $G(f) = \{[x, f(x)], x \in [a, b]\}$ má míru nula v prostoru $\mathbb{E}^2$, tj. $m(G(f)) = 0$. Zejména podgraf nezáporné funkce je měřitelná množina, neboť míra její hranice je nula.

Poznámka

Řekneme, že funkce f je *stejněměrně spojitá* na intervalu $[a, b]$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Pro funkci f na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je stejnoměrná spojitost ekvivalentní s („normální“) spojitostí.

Důkaz.

Funkce f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Necht' $\varepsilon > 0$ je libovolné, pak k $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Množinu $G(f)$ pokryjeme obdélníky s výškou $\frac{\varepsilon}{b-a}$ a základnou δ . Pro součet těchto obdélníků platí

$$\sum \frac{\varepsilon}{b-a} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b - a) = \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, $m^*(G(f)) = 0$.



Shrnutí

- Jordanova míra $m(A)$ je konečně aditivní (není spočetně aditivní).
- Třída jordanovsky měřitelných množin se nezmění, pokud sít' zjemňujeme nikoliv 2^2 -krát (1 čtvereček na 4 malé), ale n^2 -krát, kde n je libovolné přirozené číslo.
- V $\mathbb{E}^1$ jde v podstatě o dělení intervalu (místo čtverečků máme úsečky).

Náčrt konstrukce Lebesgueovy míry

Lebesgueova míra je založena na následujícím tvrzení.

Věta 6

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$ je otevřená množina. Pak existuje nejvýše spočetně mnoho otevřených, po dvou disjunktních intervalů (α_n, β_n) , $n \in \mathbb{N}$, tak, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$.

- $m_L(A) = \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n)$ pro omezenou otevřenou množinu $A \subseteq \mathbb{R}$
- $A \subset \mathbb{R}$ uzavřená a omezená, tj. $\exists c, d \in \mathbb{R} : A \subseteq (c, d) \Rightarrow (c, d) \setminus A$ je otevřená množina a tedy $m_L(A) = (d - c) - m_L((c, d) \setminus A)$
- nechť $A \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná omezená množina, pak $m_L^*(A) = \inf m(B)$, $A \subseteq B$, B je otevřená; $m_{*L}(A) = \sup m(B)$, $B \subseteq A$, B je uzavřená
- $m_L^* = m_{*L}$, pak je množina lebesgueovsky měřitelná

Příklad 2

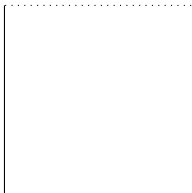
$$m_L([0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2) = ?$$

Je rovno nule, každý bod má míru nula a Lebesgueova míra je spočetně aditivní.

Existuje $A \subseteq \mathbb{R}$ omezená, pro niž $m_{*L}(A) < m_L^*(A)$, tj. není lebesgueovsky měřitelná?

(Lze je zkonstruovat s použitím axiomu výběru, např. Vitaliho nebo Bernsteinova konstrukce.)

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná, omezená množina a $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená funkce na A . Sít' řádu n vytvoří tzv. *pokrytí* řádu n množiny A . Čtverce



s touto dohodou jsou navzájem disjunktní množiny. Položíme $A = \bigcup_{j=1}^m D_j$, kde množiny D_j jsou tvaru $D_j^n = A \cap C_j^n$, kde C_j^n je nějaký čtverec sítě řádu n .

Systém $\{D_1^n, \dots, D_m^n\}$ se nazývá *pokrytí* řádu n množiny A . Každá z množin D_j^n je měřitelná, neboť je průnikem měřitelných množin.

Poznámka

Obecně v $\mathbb{R}^k$ používáme tzv. *krychlové množiny řádu n*

$$C_{j_1, \dots, j_k}^n = \left\{ [x_1, \dots, x_k] \in \mathbb{R}^k : \frac{j_1}{2^n} \leq x_1 < \frac{j_1 + 1}{2^n}, \dots, \frac{j_k}{2^n} \leq x_k < \frac{j_k + 1}{2^n} \right\},$$

což jsou (neuzavřené) po dvou disjunktní měřitelné množiny pokrývající $\mathbb{R}^k$ s mírou $m(C^n) = 2^{-kn}$.

Konstrukci a vlastnosti si pro přehlednost předvedeme v $\mathbb{R}^2$.

Nechť

$$M_j = \sup_{[x,y] \in D_j^n} f(x,y), \quad m_j = \inf_{[x,y] \in D_j^n} f(x,y),$$

pak definujeme

$$S_n(f, A) = \sum_{j=1}^m M_j \cdot m(D_j^n), \quad s_n(f, A) = \sum_{j=1}^m m_j \cdot m(D_j^n)$$

horní a dolní součet řádu n a platí

$$S_{n+1}(f, A) \leq S_n(f, A), \quad s_{n+1}(f, A) \geq s_n(f, A),$$

tj. posloupnost $\{S_n(f, A)\}$ je nerostoucí a zdola ohraničená a posloupnost $\{s_n(f, A)\}$ je neklesající a shora ohraničená, pak existují

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, A) =: \overline{\iint_A} f(x,y) \, dx \, dy, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, A) =: \underline{\iint_A} f(x,y) \, dx \, dy$$

horní a dolní Riemannův integrál funkce f na množině A .

Definice 4

Pokud se horní Riemannův integrál rovná dolnímu, tj.

$$\overline{\iint_A} f(x, y) \, dx \, dy = \underline{\iint_A} f(x, y) \, dx \, dy,$$

řekneme, že funkce f je na A riemannovsky integrovatelná a definujeme

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \overline{\iint_A} f(x, y) \, dx \, dy = \underline{\iint_A} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Poznámka

Pro $n = 1$ lze použít libovolné dělení D , popř. se omezit na dyadické dělení $D^{[2]}$ (dyadická čísla $\frac{m}{2^n}$, $m, n \in \mathbb{N}$). Samozřejmě platí $D \supset D^{[2]}$, tedy

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq [2] \int_a^b f(x) \, dx, \quad \overline{\int}_a^b f(x) \, dx \leq [2] \overline{\int}_a^b f(x) \, dx,$$

odkud ihned plyne, že $[2] \int \leq \int \leq \overline{\int} \leq [2] \overline{\int}$. Tento vztah musí platit i naopak, jinak by šlo o jinou konstrukci.

Např. víme, že platí: *Je-li D_n nulová posloupnost dělení, pak*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, D_n).$$

Věta 7

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná a omezená množina, $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$. Jsou-li f, g integrovatelné na A , pak jsou na A integrovatelné i funkce $f \pm g$ a platí

$$\iint_A f(x, y) \pm g(x, y) \, dx \, dy = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy \pm \iint_A g(x, y) \, dx \, dy.$$

Dále, pro $\alpha \in \mathbb{R}$ libovolné je integrovatelná i funkce $\alpha \cdot f$ a platí

$$\iint_A \alpha \cdot f(x, y) \, dx \, dy = \alpha \cdot \iint_A f(x, y) \, dx \, dy.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
 \iint_A (f + g) \, dx \, dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f + g, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \inf_{D_j^n} (f + g) \cdot m(D_j^n) \\
 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \left(\inf_{D_j^n} f + \inf_{D_j^n} g \right) m(D_j^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(f, A) + s_n(g, A)] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, A) + \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(g, A) = \iint_A f \, dx \, dy + \iint_A g \, dx \, dy,
 \end{aligned}$$

podobně $\overline{\iint}_A (f + g) \, dx \, dy \leq \overline{\iint}_A f \, dx \, dy + \overline{\iint}_A g \, dx \, dy$.

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned}\iint_A f \, dx \, dy + \iint_A g \, dx \, dy &\leq \iint_A (f+g) \, dx \, dy \leq \overline{\iint_A (f+g) \, dx \, dy} \\ &\leq \overline{\iint_A f \, dx \, dy} + \overline{\iint_A g \, dx \, dy}.\end{aligned}$$

Jsou-li f, g integrovatelné, sevřou integrály mezi sebou.

Násobení konstantou dokážeme podobně. Jen je potřeba hlídat znaménko konstanty α , tj. je-li $\alpha \geq 0$, je vše v pořádku; je-li $\alpha < 0$, potom např.

$$\sup(\alpha f) = \alpha \inf(f).$$

Rozdíl je triviálním důsledkem předchozího.



Věta 8

Nechť f je integrovatelná na omezené měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a $B \subseteq A$ je měřitelná množina. Pak funkce f je integrovatelná i na B .

Důkaz.

Nechť je $\{D_1^n, \dots, D_m^n\}$ pokrytí řádu n množiny A . Toto pokrytí vytváří přirozeným způsobem pokrytí

$$\{D_1^n \cap B, \dots, D_m^n \cap B\}, \quad \{D_1^n \cap (A \setminus B), \dots, D_m^n \cap (A \setminus B)\}$$

množin B a $A \setminus B$. Platí

$$s_n(A, f) \leq s_n(B, f) + s_n(A \setminus B, f), \quad S_n(A, f) \geq S_n(B, f) + S_n(A \setminus B, f),$$

a pro $n \rightarrow \infty$ máme

$$\begin{aligned} \iint_B f \, dx \, dy + \iint_{A \setminus B} f \, dx \, dy &\geq \iint_A f \, dx \, dy \\ &\geq \overline{\iint_B f \, dx \, dy} + \overline{\iint_{A \setminus B} f \, dx \, dy}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} 0 &\geq \iint_{\underline{B}} f \, dx \, dy - \overline{\iint_B f \, dx \, dy} \\ &\geq \overline{\iint_{A \setminus B} f \, dx \, dy} - \iint_{\underline{A \setminus B}} f \, dx \, dy \geq 0. \end{aligned}$$

Odtud ihned

$$\iint_{\underline{B}} f \, dx \, dy = \overline{\iint_B f \, dx \, dy}, \quad \iint_{\underline{A \setminus B}} f \, dx \, dy = \overline{\iint_{A \setminus B} f \, dx \, dy}.$$

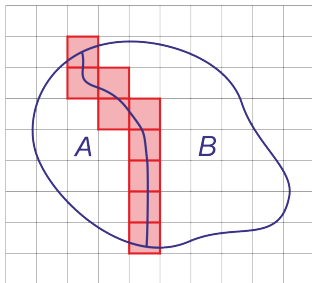


Věta 9

Nechť f je integrovatelná na měřitelných, omezených a disjunktních množinách $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je f integrovatelná i na $A \cup B$ a platí

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy + \iint_B f(x, y) \, dx \, dy.$$

Důkaz.



Tři druhy čtverečků – pouze A , pouze B a smíšené. Míra smíšených jde k nule.



Věta 10

Nechť funkce f je omezená na A a $m(A) = 0$. Pak je f na A integrovatelná a platí

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

Důkaz.

Máme $|f(x, y)| \leq M$ na A , odtud

$$-M \cdot m(A) \leq s_n(f, A) \leq S_n(f, A) \leq M \cdot m(A).$$



Důsledek 1

Nechť A, B jsou měřitelné množiny a platí $m(A \cap B) = 0$. Je-li funkce f integrovatelná na A i na B , pak je integrovatelná i na $A \cup B$ a platí

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy + \iint_B f(x, y) \, dx \, dy.$$

Plyne ihned z Vět 9 a 10 a faktu, že

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

(Jedná se o zesílení Věty 9.)

Věta 11

Nechť je funkce f spojitá a omezená na omezené měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je funkce f na množině A integrovatelná.

Důkaz.

Podobně jako u jednorozměrných integrálů je důkaz založen na tvrzení, že f je integrovatelná právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : S_n(f, A) - s_n(f, A) < \varepsilon.$$



Snadno pro integrál v $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^k$) dostaneme i další tvrzení známá z $\mathbb{R}^1$.

Věta 12

Nechť jsou funkce f, g integrovatelné na měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a platí $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in A$. Pak

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_A g(x, y) \, dx \, dy.$$

Věta 13

Nechť je funkce f integrovatelná na měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je i funkce $|f|$ na množině A integrovatelná a platí

$$\left| \iint_A f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

Definice 5

Řekneme, že funkce $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ má *skoro všude* na množině A vlastnost V , jestliže existuje množina B taková, že $B \subseteq A$, $m(B) = 0$ a funkce f má vlastnost V ve všech bodech množiny $A \setminus B$.

(Tj. vlastnost není splněna na množině míry nula, přičemž $m(\emptyset) = 0$.)

Věta 14

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená měřitelná množina a $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, kde f je na A integrovatelná a g je na A omezená. Pokud platí $f(x, y) = g(x, y)$ skoro všude na A , pak je na A funkce g integrovatelná a

$$\iint_A g(x, y) \, dx \, dy = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy.$$

Důkaz.

Funkce $F(x, y) = f(x, y) - g(x, y) = 0$ skoro všude na A , tedy $\exists B \subseteq A, m(B) = 0$ a $F(x, y) = 0$ na $A \setminus B$. Potom

$$\iint_A F = \iint_B F + \iint_{A \setminus B} F = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \iint_A f = \iint_A g.$$



Věta 15

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená a měřitelná množina a nechť $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená a skoro všude spojitá na A . Pak je funkce f na A integrovatelná.

Důkaz.

Existuje množina $B \subseteq A$ taková, že $m(B) = 0$ a f je spojitá na $A \setminus B$. Pak podle Věty 11 je funkce f integrovatelná na $A \setminus B$ a podle Věty 10 je $\iint_B f = 0$, tedy $\iint_A f$ existuje a je roven $\iint_{A \setminus B} f$. □

- $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy \quad \dots \quad \text{dvojný integrál}$
- $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \quad \dots \quad \text{dvojnásobný integrál}$

Věta 16

Nechť $A = [a, b] \times [c, d]$ je obdélník v $\mathbb{R}^2$ a funkce $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je na množině A spojitá. Pak

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Důkaz.

Označme $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Tato funkce je korektně definována, neboť integrand je spojitá funkce proměnné y . Sít' řádu n , označme $\{D_1^n, \dots, D_m^n\}$, tvoří pokrytí $A = [a, b] \times [c, d]$ a současně vytváří dělení intervalů $[a, b]$ i $[c, d]$. Necht' $[a, b] = \bigcup_{i=1}^p K_i^n$ a $[c, d] = \bigcup_{j=1}^q J_j^n$. Dále označme

$$u_{ij}^n = \inf_{[x,y] \in K_i^n \times J_j^n} f(x, y), \quad U_{ij}^n = \sup_{[x,y] \in K_i^n \times J_j^n} f(x, y).$$

Potom

$$S_n(f, A) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q U_{ij}^n \underbrace{m(K_i^n)m(J_j^n)}_{m(D_{ij}^n)},$$

$$s_n(f, A) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q u_{ij}^n m(K_i^n)m(J_j^n).$$

Máme tedy pro $\int_a^b F(x) dx$ a $\xi_i \in K_i^n$ libovolné, že

$$\begin{aligned} s_n(F, [a, b]) &= \sum_{i=1}^p \inf_{x \in K_i^n} F(x) m(K_i^n) \\ &\leq \underbrace{\sum_{i=1}^p F(\xi_i) m(K_i^n)}_{\sum_{i=1}^p \left(\int_c^d f(\xi_i, y) dy \right) m(K_i^n)} \leq \sum_{i=1}^p \sup_{x \in K_i^n} F(x) m(K_i^n) \end{aligned}$$

a pro $\int_c^d f(\xi_i, y) dy$, $\eta_i \in J_i^n$ libovolné, při označení $G(y) := f(\xi_i, y)$

$$\begin{aligned} s_n(G, [c, d]) &= \sum_{j=1}^q \inf_{y \in J_j^n} G(y) m(J_j^n) \\ &\leq \sum_{j=1}^q G(\eta_j) m(J_j^n) \leq \sum_{j=1}^q \sup_{y \in J_j^n} G(y) m(J_j^n). \end{aligned}$$

Spojením předchozích nerovností obdržíme

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q u_{ij}^n m(K_i^n) m(J_j^n)}_{\rightarrow \iint f \, dx \, dy} &\leq \int_a^b \int_c^d f \, dy \, dx \leq \int_a^b \overline{\int_c^d f \, dy} \, dx \\
 &\leq \overline{\int_a^b \int_c^d f \, dy \, dx} \leq \overline{\int_a^b \int_c^d f \, dy \, dx} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q U_{ij}^n m(K_i^n) m(J_j^n)}_{\rightarrow \overline{\iint f \, dx \, dy}}.
 \end{aligned}$$

Opačné pořadí integrace získáme zcela analogicky (přeznačením). □

Věta 17 (Fubiniho věta)

Nechť f je spojitá na množině

$$A = \{[x, y] : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

kde $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce spojité na intervalu $[a, b]$. Pak

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Podobně pro

$$A = \{[x, y] : y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}, \quad g, h \in C[c, d],$$

platí

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Důkaz.

Nechť $Q = [a, b] \times [c, d]$, $A \subseteq Q$ a definujme funkci $\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & [x, y] \in A \\ 0 & [x, y] \in Q \setminus A \end{cases}$$

$\tilde{f}$ je spojitá s výjimkou grafů g, h , tedy je skoro všude spojitá na Q , odtud

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_Q \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \left(\underbrace{\int_c^{g(x)} \tilde{f} \, dy}_{=0} + \int_{g(x)}^{h(x)} \tilde{f} \, dy + \underbrace{\int_{h(x)}^d \tilde{f} \, dy}_{=0} \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$



Poznámka

Je-li ve větě o integraci přes obdélník funkce f pouze integrovatelná, platí

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\underline{c}}^d f(x,y) \, dy \right) dx = \int_a^b \left(\overline{\int}_c^d f(x,y) \, dy \right) dx.$$

Pokud označíme

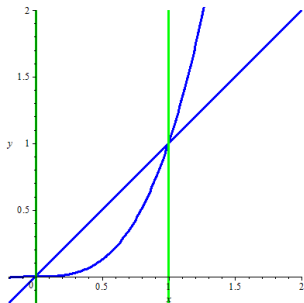
$$F(x) = \int_{\underline{c}}^d f(x,y) \, dy, \quad G(x) = \overline{\int}_c^d f(x,y) \, dy,$$

může nastat případ, kdy $F(x) < G(x)$ v jistých bodech $x \in [a, b]$, ale množina těchto bodů má Jordanovu míru rovnu nule, tedy

$$\int_a^b F(x) \, dx = \int_a^b G(x) \, dx.$$

Příklad 3

Vypočtete $\iint_A x^3 y \, dx \, dy$, kde $A = \{[x, y] : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x\}$.

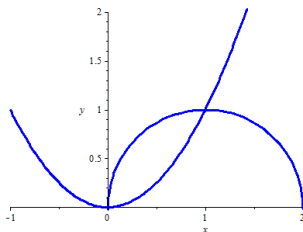


$$\begin{aligned}
 \iint_A x^3 y \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{x^3}^x x^3 y \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 x^3 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 (x^2 - x^6) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 - x^9 \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^{10}}{10} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_A x^3 y \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[3]{y^4}} x^3 y \, dx \, dy = \int_0^1 y \left[\frac{x^4}{4} \right]_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[3]{y^4}} dy \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 y (y^{4/3} - y^4) \, dy = \frac{1}{4} \int_0^1 y^{7/3} - y^5 \, dy = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{10} y^{10/3} - \frac{y^6}{6} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{30}
 \end{aligned}$$

Příklad 4

Zaměňte pořadí integrace $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx$.



$$y = \sqrt{2x - x^2}$$

$$y^2 = 2x - x^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$$

$$y = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

Vybereme odpovídající horní, resp. dolní kousky, tedy

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Poznámka

Samozřejmě platí

$$m(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy.$$

Příklad 5

Vypočítejte míru množiny $A = \{[x, y] : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx = \int_{-1}^1 [y]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \, dx = \cos t \, dt \\ 0 = \sin 0, \, 1 = \sin \pi/2 \end{array} \right| = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} 1 + \cos 2t \, dt = \int_0^{\pi/2} dt + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos 2t \, dt}_{=0} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Věta 18

Uvažujme reálný interval $[a, b]$. Necht'

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), G(x, y) \leq z \leq H(x, y)\},$$

kde funkce $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou na $[a, b]$ spojité a funkce $G, H: B \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité na množině

$$B = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

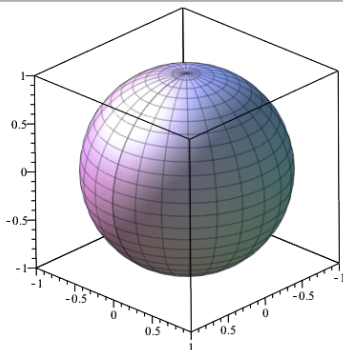
Pak, je-li $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na A , platí

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{G(x, y)}^{H(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Příklad 6

Vypočítejte $\iiint_A dx \, dy \, dz$, kde

$$A = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \right. \\ \left. -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \right\}.$$



$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2} \, dy \, dx \\
&= \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{1-x^2} \sin t, \, dy = \sqrt{1-x^2} \cos t \, dt \\ y = -\sqrt{1-x^2} \rightarrow t = -\pi/2, \, y = \sqrt{1-x^2} \rightarrow t = \pi/2 \end{array} \right| \\
&= \int_{-1}^1 \left(2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{(1-x^2) - (1-x^2)\sin^2 t} \sqrt{1-x^2} \cos t \, dt \right) dx \\
&= 2 \int_{-1}^1 (1-x^2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \, dx \\
&= 2 \int_{-1}^1 (1-x^2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt \, dx = \int_{-1}^1 (1-x^2) \pi \, dx \\
&= 2\pi \int_0^1 1-x^2 \, dx = 2\pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

Poznámka

Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ je n -rozměrný kvádr. Je-li f spojitá na A , pak

$$\int_A f(x) \, dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \cdots dx_1.$$

Příklad 7

$\iiint_A dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$, kde $A = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] : x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 1 - x_1], x_3 \in [0, 1 - x_1 - x_2], x_4 \in [0, 1 - x_1 - x_2 - x_3]\}$.

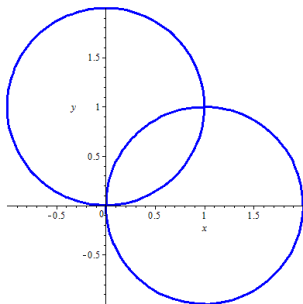
Takové množině A se říká *jednotkový simplex*, používá se k triangulaci n -rozměrných těles a v optimalizaci („ n -rozměrný trojúhelník“).

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} dx_4 dx_3 dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} (1 - x_1 - x_2 - x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \left[(1 - x_1 - x_2)x_3 - \frac{x_3^2}{2} \right]_0^{1-x_1-x_2} dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (1 - x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}(1 - x_1 - x_2)^2 dx_2 dx_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (1 - x_1 - x_2)^2 dx_2 dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x_1-x_2)^3}{3} \right]_0^{1-x_1} dx_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{3}(1 - x_1)^3 dx_1 = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} [(1 - x_1)^4]_0^1 = \frac{1}{4!}
 \end{aligned}$$

Příklad 8

Vypočtete plochu obrazce daného nerovnostmi

$$x^2 - 2x + y^2 \leq 0, \quad x^2 - 2y + y^2 \leq 0.$$



$$x^2 - 2x + y^2 \leq 0$$

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$x = 1 - \sqrt{1 - y^2}, \quad y = \sqrt{2x - x^2}$$

$$x^2 - 2y + y^2 \leq 0$$

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$$

$$x = \sqrt{2y - y^2}, \quad y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

$$\begin{aligned}\iint_A dx \, dy &= \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \, dx = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} - 1 + \sqrt{1-x^2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi - 2}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} \, dx &= \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} \, dx = |x-1=t, \, dx=dt| \\ &= \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} \, dt = | \text{sudá funkce} | = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

- Střední hodnota:

$$\text{av}(f) = \frac{\iint_A f(x, y) dx dy}{m(A)}.$$

- Uvažujme $\iint_A F(x, y) dx dy$. Je-li $\sigma(x, y)$ plošná hustota v bodě $[x, y]$ a $\rho(x, y)$ vzdálenost bodu $[x, y]$ od osy otáčení o , pak

funkce F	integrál z funkce F
1	Obsah množiny A (S)
$\sigma(x, y)$	hmotnost množiny A (m)
$y\sigma(x, y)$	lineární moment vzhl. k ose x (U_x)
$x\sigma(x, y)$	lineární moment vzhl. k ose y (U_y)
$y^2\sigma(x, y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose x (J_x)
$x^2\sigma(x, y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose y (J_y)
$\rho^2(x, y)\sigma(x, y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose o (J_o)
y^2	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose x (I_x)
x^2	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose y (I_y)
$\rho^2(x, y)$	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose o (I_o)

- Souřadnice těžiště průřezu $[x_T, y_T]$ ($\sigma(x, y) = 1$):

$$x_T = \frac{\iint_A x dx dy}{S}, \quad y_T = \frac{\iint_A y dx dy}{S}.$$

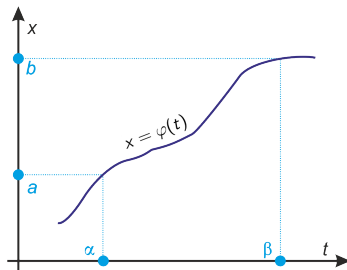
$$n = 1$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = |x = \varphi(t), \, dx = \varphi'(t) \, dt| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt,$$

kde $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Také lze psát jako

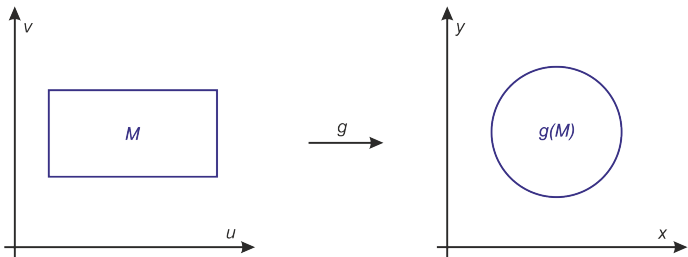
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(g(t)) g'(t) \, dt,$$

kde $g' \neq 0$ (g je prostá).



$$n = 2$$

zobrazení $g: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$



Věta 19 (O transformaci)

Nechť $M \subseteq \mathbb{E}^2$ je otevřená množina v rovině (u, v) , g je prosté zobrazení množiny M do roviny (x, y) dané funkcemi $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, které mají na M spojitě parciální derivace prvního řádu. Nechť funkce

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

je různá od nuly a ohraničená na M . Nechť M a $g(M)$ jsou měřitelné množiny a funkce f je spojitá a ohraničená na $g(M)$. Pak platí

$$\iint_{g(M)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_M f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| \, du \, dv.$$

Hlavní idea důkazu.

Nechť $D_1, \dots, D_m$ je pokrytí řádu n množiny $g(M)$, pak

$$\tilde{D}_1 = g^{-1}(D_1), \dots, \tilde{D}_m = g^{-1}(D_m)$$

pokrývají množinu M . Zvolme $[\xi_i, \eta_i] \in D_i$ a označme $[\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i] = g^{-1}([\xi_i, \eta_i])$. Utvořme integrální součet příslušný dvojnému integrálu přes $g(M)$

$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i) m(D_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iint_{g(M)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Jsou-li D_i malé, jsou také $\tilde{D}_i$ malé a pro $[x, y] \in D_i$ lze zobrazení g aproximovat jeho diferenciálem g' v bodě $[\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i]$, tj. lineárním zobrazením. Transformace míry při lineárním zobrazení je

$$m(D_i) = |\det g'(\xi_i, \eta_i)| m(\tilde{D}_i).$$

Dosazením dostáváme

$$\begin{array}{ccc}
 \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i) m(D_i) & \approx & \sum_{i=1}^m f(x(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i), y(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i)) |\det g'(\xi_i, \eta_i)| m(\tilde{D}_i) \\
 \downarrow n \rightarrow \infty & & \downarrow n \rightarrow \infty \\
 \iint_{g(M)} f(x, y) \, dx \, dy & & \iint_M f(x(u, v), y(u, v)) |\det g'| \, du \, dv
 \end{array}$$

Nejobtížnější technická záležitost je dokázat, že „ $\approx$ “ mezi sumami přejde v limitě na rovnost mezi integrály. Lze to dokázat podobně jako pro jednorozměrný integrál pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě. □

Transformace v $\mathbb{E}^2$ do polárních souřadnic je dána

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost od počátku (poloměr) a $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v kladném smyslu.

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \neq 0$$

Příklad 9

Vypočítejte obsah množiny

$$M : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0.$$

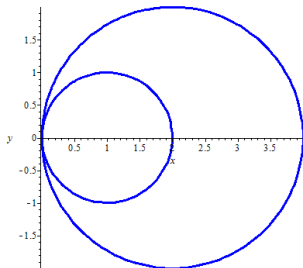
$$x^2 + y^2 \leq 2x \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1,$$

$$\begin{aligned} m(M) &= \int_M dx \, dy = \left| \begin{array}{ll} x = \rho \cos \varphi & \rho \in (0, 2 \cos \varphi] \\ y = \rho \sin \varphi & \varphi \in [0, \pi/2] \end{array} \right. J(\rho, \varphi) = \rho \neq 0 \left. \right| \\ &= \iint_D \rho \, d\varphi \, d\rho = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \varphi} \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \cos^2 \varphi}{2} \, d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Příklad 10

Vypočítejte obsah množiny

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 - 1 \geq 0, (x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0\}.$$



$$\begin{aligned}\varphi &\in [0, \pi/2], \\ \rho &\in [2 \cos \varphi, 4 \cos \varphi]\end{aligned}$$

$$m(M) = \iint_M dx \, dy = 2 \iint_D \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} [\rho^2]_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} d\varphi = \dots = 3\pi$$

Poznámka

Obsah obrazce v polárních souřadnicích

- a) $n = 1, P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \, d\varphi$ (aproximace kruhovou výsečí),
b) $n = 2$, pomocí dvojného integrálu snadno odvodíme

$$\begin{aligned} P &= \iint_M dx \, dy = \iint_D \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\rho(\varphi)} \rho \, d\rho \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\rho(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \, d\varphi. \end{aligned}$$

Poznámka

Volba transformace pro $n = 1$ byla dána funkcí, pro $n = 2, 3, \dots$ je dána tvarem množiny, přes kterou integrujeme.

Věta 20 (O transformace trojného integrálu)

Nechť $M \subseteq \mathbb{E}^3$ je otevřená množina v prostoru (u, v, w) , g je prosté zobrazení na M do prostoru (x, y, z) dané funkcemi $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, které mají na M spojitě parciální derivace prvního řádu. Nechť $J(u, v, w) \neq 0$ je ohraničené na M . Nechť M a $g(M)$ jsou měřitelné a funkce f je spojitá a ohraničená na $g(M)$. Pak platí

$$\begin{aligned} & \iiint_{g(M)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_M f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

Transformace v $\mathbb{E}^3$

- válcové (cylindrické) souřadnice

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z, \quad J(\rho, \varphi, z) = \rho,$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost od osy z (poloměr válce) a $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v kladném smyslu v rovině rovnoběžné s rovinou xy .

- sférické (kulové) souřadnice

$$x = \rho \cos \varphi \sin \vartheta, y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta, z = \rho \cos \vartheta, \quad J(\rho, \varphi, \vartheta) = -\rho^2 \sin \vartheta$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost od počátku (poloměr koule), $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v projekci do roviny xy (rovina $z = 0$) a $\vartheta \in [0, \pi]$ je odchylka od kladné poloosy z .

Transformace v $\mathbb{E}^n$ do hypersférických souřadnic

$$x_1 = \rho \cos \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2},$$

$$x_2 = \rho \sin \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2},$$

$$x_3 = \rho \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2},$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = \rho \cos \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2},$$

$$x_n = \rho \cos \vartheta_{n-2},$$

kde $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) a $\vartheta_i \in [0, \pi]$, $i = 1, \dots, n-2$.

$$J(\rho, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) = (-1)^n \rho^{n-1} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-2} \vartheta_{n-2}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \rho^2$$

Poznámka

- $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost od počátku,
- $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ (rovina $x_n = 0$) od kladné poloosy x_1 ,
- $\vartheta_{n-2} \in [0, \pi]$ je odchylka průvodiče daného bodu od kladné poloosy x_n ,
- $\vartheta_{n-3} \in [0, \pi]$ je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_n = 0$ od kladné poloosy x_{n-1} ,
- $\vartheta_{n-4} \in [0, \pi]$ je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_n = 0$ promítnuté do roviny x_{n-1} od kladné poloosy x_{n-2} ,
-

Poznámka

- Samozřejmě existuje celá řada dalších často používaných transformací (např. zobecněné sférické pro elipsoidy) a snadno lze dle tvaru množiny vytvořit transformaci „na míru“.
- Uvedené vzorce pro transformace nejsou jediné možné, (hyper)sférické souřadnice (a tedy i polární) lze použít i např. takto

$$x_1 = \rho \cos \varphi \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cdots \cos \vartheta_{n-3} \cos \vartheta_{n-2},$$

$$x_2 = \rho \sin \varphi \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cdots \cos \vartheta_{n-3} \cos \vartheta_{n-2},$$

$$x_3 = \rho \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cdots \cos \vartheta_{n-3} \cos \vartheta_{n-2},$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = \rho \sin \vartheta_{n-3} \cos \vartheta_{n-2},$$

$$x_n = \rho \sin \vartheta_{n-2},$$

$$\text{kde } J(\rho, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) = \rho^{n-1} \cos \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \cdots \cos^{n-2} \vartheta_{n-2}.$$

Nevlastní integrál z neohraničené funkce

Uvažujme funkci f definovanou na neprázdné množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definice 6

Bod $A \in \overline{\Omega}$ se nazývá *singulární bod* funkce f , jestliže f není ohraničená na žádné množině tvaru $\Omega \cap \mathcal{O}(A)$, kde $\mathcal{O}(A)$ je libovolné kruhové okolí bodu A .

Protože bod A nemůže být izolovaným bodem množiny Ω , jsou možné dva případy. Buď je A vnitřním bodem množiny Ω , nebo je jejím hromadným hraničním bodem; v druhém případě nemusí A ležet v množině Ω .

Definice 7

Řekneme, že posloupnost omezených množin $\{M_n\}$, $M_n \subseteq \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, se *smršťuje k bodu A*, jestliže

- ❶ Bod A je vnitřním bodem každé z množin M_n .
 - ❷ Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} d(M_n) = 0$.
- Číslo $d(M) = \sup\{\rho(X, Y) : X, Y \in M\}$ je průměr množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$, přitom ρ je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^2$.
 - Množiny M_n nemusí být souvislé.
 - Posloupnost množin M_n nemusí být monotónní vzhledem k inkluzi.

Předpoklad 1

Funkce f je integrovatelná na každé množině $\Omega \setminus M$, kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná měřitelná množina obsahující A ve svém vnitřku. (Z tohoto předpokladu plyne, že množina Ω je měřitelná.)

Definice 8

Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Řekneme, že **nevlastní integrál** z funkce f **konverguje** na množině Ω , jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \setminus M_n} f(x, y) \, dx dy = K$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ smřšťujících se k bodu A . Pak píšeme

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = K.$$

V opačném případě, tj. pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál z funkce f na množině Ω **diverguje**.

Lemma 3

Nechť funkce f je integrovatelná na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nechť posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ se smršťuje k bodu $A \in \overline{\Omega}$. Pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \setminus M_n} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy.$$

Poznámka

Pokud tedy použijeme postup pro nevlastní integrál na vlastní integrál, dostaneme správný výsledek.

Důkaz.

Podle předpokladu je funkce f integrovatelná na Ω , tedy existuje konstanta k taková, že $|f(x, y)| \leq k$ pro každé $[x, y] \in \Omega$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost $\Omega \setminus (\Omega \setminus M_n) = \Omega \cap M_n$. Jelikož $d(M_n) \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$, bude $m(M_n) \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Protože množiny $\Omega \cap M_n$ jsou měřitelné a $\Omega \cap M_n \subseteq M_n$, dostaneme

$$0 \leq m(\Omega \cap M_n) \leq m(M_n),$$

tedy $m(\Omega \cap M_n) \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Odtud ihned

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy - \iint_{\Omega \setminus M_n} f(x, y) \, dx dy \right| &= \left| \iint_{\Omega \cap M_n} f(x, y) \, dx dy \right| \leq \\ &\leq \iint_{\Omega \cap M_n} |f(x, y)| \, dx dy \leq \iint_{\Omega \cap M_n} k \, dx dy = k \cdot m(\Omega \cap M_n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pro $n \rightarrow \infty$, což dokazuje tvrzení. □

Věta 21

Nechť funkce f, g jsou definované na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují

Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrály

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy, \quad \iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy$$

konvergují a α, β jsou libovolné konstanty, pak konverguje také integrál $\iint_{\Omega} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] \, dx dy$ (pokud je vůbec nevlastní) a platí

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] \, dx dy \\ = \alpha \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy + \beta \iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy. \end{aligned} \tag{3}$$

Důkaz.

Nechť $\{M_n\}$ je libovolná posloupnost měřitelných množin, která se smršťuje k bodu A . Podle předpokladů platí rovnosti

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \setminus M_n} f(x, y) \, dx dy &= \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \setminus M_n} g(x, y) \, dx dy &= \iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy.\end{aligned}$$

Z linearity vlastního integrálu vzhledem k integrandu plyne, že

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega \setminus M_n} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] \, dx dy \\ = \alpha \iint_{\Omega \setminus M_n} f(x, y) \, dx dy + \beta \iint_{\Omega \setminus M_n} g(x, y) \, dx dy.\end{aligned}$$

Odtud limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$ dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega \setminus M_n} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] \, dx dy \\ = \alpha \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy + \beta \iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy. \end{aligned}$$

Pokud je $\iint_{\Omega} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] \, dx dy$ nevlastní, znamená to podle Definice 8, že je konvergentní, protože posloupnost $\{M_n\}$ byla libovolná, a že platí rovnost (3). Vzhledem k Lemmatu 3 je tato rovnost platná i v případě, že je zmíněný integrál vlastní. □

Věta 22

Nechť je nezáporná funkce f definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Pak je nevlastní integrál

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$$

konvergentní právě tehdy, když existuje posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ smřšťující se k bodu A taková, že číselná posloupnost mající členy

$$\iint_{\Omega \setminus M_n} f(x, y) \, dx dy, \quad n \in \mathbb{N},$$

je ohraničená.

Důkaz.

Viz skripta.



Důsledek 2

Nechť je nezáporná funkce f definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Bud' $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kruhů se středy v bodě A a poloměry r_n , přičemž posloupnost $\{r_n\}$ je klesající a $r_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Pak je intergál

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$$

konvergentní právě tehdy, když je posloupnost

$$\iint_{\Omega \setminus K_n} f(x, y) \, dx dy, \quad n \in \mathbb{N}$$

ohraničená.

Příklad 11

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina, $A = [x_0, y_0]$ je její vnitřní bod a α je reálné číslo. Označme

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Dokažte, že nevlastní integrál

$$\iint_M \frac{dx dy}{r^\alpha}$$

konverguje pro $0 < \alpha < 2$ a diverguje $\alpha \geq 2$ (pro $\alpha \leq 0$ jde o vlastní integrál).

Bod A je pro $\alpha > 0$ zřejmě singulárním bodem integrandu $1/r^\alpha$, protože $1/r^\alpha \rightarrow \infty$ pro $[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]$.

Díky aditivitě vlastního integrálu vzhledem k integračnímu oboru, lze množinu M při vyšetřování konvergence nahradit kruhem K se středem A o dostatečně malém poloměru $R > 0$. (Může se tak změnit hodnota, ale nikoli konvergence/divergence.)

Označme K_n kruh se středem v A a poloměrem $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{K_n\}$ se smršťuje k singulárnímu bodu A a pro každé $n \geq n_0$, kde $n_0 = \lfloor 1/R \rfloor + 1$, je $K_n \subset K$. Vypočítáme integrály

$$\iint_{K \setminus K_n} \frac{dx dy}{r^\alpha}, \quad n \geq n_0.$$

Protože množina $K \setminus K_n$ je mezikružím se středem v bodě A s poloměry $1/n$ a R , použijeme transformaci, která je složením transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (x_0, y_0) .

Tedy $x = x_0 + \rho \cos \varphi$, $y = y_0 + \rho \sin \varphi$, $J = \rho$. Množina $K \setminus K_n$ je obrazem obdélníku $L_n = [1/n, R] \times [0, 2\pi]$. Vyjde

$$\begin{aligned} \iint_{K \setminus K_n} \frac{dx dy}{r^\alpha} &= \iint_{L_n} \frac{\rho \, d\rho d\varphi}{\rho^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1/n}^R \rho^{1-\alpha} d\rho \\ &= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_{1/n}^R = \frac{2\pi}{2-\alpha} (R^{2-\alpha} - n^{\alpha-2}) & \text{pro } \alpha \neq 2, \\ 2\pi [\ln \rho]_{1/n}^R = 2\pi (\ln R + \ln n) & \text{pro } \alpha = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

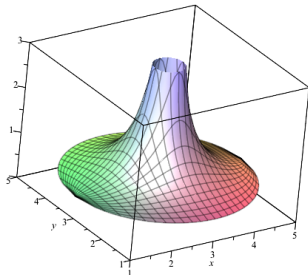
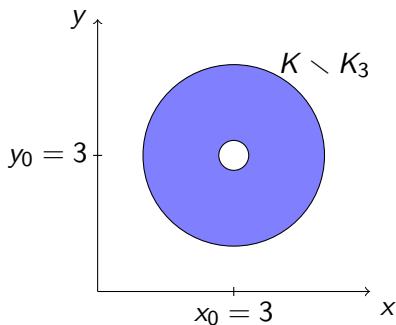
Odtud je vidět, že pro $0 < \alpha < 2$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K \setminus K_n} \frac{dx dy}{r^\alpha} = \frac{2\pi R^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

a pro $\alpha \geq 2$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K \setminus K_n} \frac{dx dy}{r^\alpha} = \infty.$$

Protože integrand je kladná funkce, podle Důsledku 2 integrál konverguje právě pro $0 < \alpha < 2$. Na obrázcích je horní a dolní hranice tělesa omezeného shora grafem funkce $1/r^\alpha$ a zdola rovinou $z = 0$ na mezikruží $K \setminus K_3$ pro $\alpha = 1$, $x_0 = y_0 = 3$ a $R = 2$.



Poznámka

Analogicky lze dokázat zobecnění výsledku z předchozího příkladu.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $A = [y_1, \dots, y_n]$ je její vnitřní bod a α je reálné číslo. Označme $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$. Pak nevlastní integrál $\int \dots \int_M \frac{1}{r^\alpha} dx_1 \dots dx_n$ konverguje pro $0 < \alpha < n$ a diverguje pro $\alpha \geq n$ (pro $\alpha \leq 0$ jde o vlastní integrál).

Při výpočtu použijeme sférické souřadnice. Je-li speciálně $M = K$, kde K je n -rozměrná koule se středem v bodě A a poloměrem $R > 0$, vyjde pro $\alpha < n$ konvergentní integrál s hodnotou

$$\int \dots \int_M \frac{1}{r^\alpha} dx_1 \dots dx_n = \frac{R^{n-\alpha}}{(n-\alpha)(n-2)!!} \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

(Pro $n = 1$ položíme $(-1)!! = 1$.)

Vzorec platí i pro $\alpha \leq 0$, kdy jde o vlastní integrál.

Věta 23 (Srovnávací kritérium)

Nechť jsou nezáporné funkce f, g definované na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují Předpoklad 1. Předpokládejme, že platí $f(x, y) \leq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in \Omega$.

- ❶ *Jestliže integrál $\iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy$ konverguje, konverguje i integrál $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$.*
- ❷ *Jestliže integrál $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$ diverguje, diverguje i integrál $\iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy$.*

Lemma 4

Nechť je funkce f definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrál

$$\iint_{\Omega} |f(x, y)| \, dx dy$$

konverguje, konverguje i integrál

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy.$$

Důkaz.

Položme $g = |f| - f$. Pak platí $0 \leq g \leq 2|f|$ na Ω . Ze srovnávacího kritéria (Věta 23) a předpokladu, že integrál $\iint_{\Omega} |f(x, y)| \, dx dy$ konverguje, plyne, že rovněž integrál $\iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy$ konverguje. Protože $f = |f| - g$, vyplývá z Věty 21, že integrál $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$ je konvergentní. $\square$

Věta 24

Nechť funkce f, g jsou definované na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod a necht' obě splňují Předpoklad 1. Předpokládejme, že funkce g je nezáporná, $|f(x, y)| \leq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in \Omega \setminus \{A\}$ a integrál $\iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy$ je konvergentní. Pak je konvergentní i integrál $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$.

Důkaz.

Tvrzení plyne z Věty 23 a Lemmatu 4.



Definice 9

Řekneme, že nevlastní integrál $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje integrál $\iint_{\Omega} |f(x, y)| \, dx dy$.

Věta 25

Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrál $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$ konverguje, pak konverguje i integrál

$$\iint_{\Omega} |f(x, y)| \, dx dy.$$

Tedy všechny konvergentní integrály jsou absolutně konvergentní.

Nevlastní integrál na neomezené množině

Pro každé $r > 0$ označme $K(r)$ kruh se středem v počátku a poloměrem r .

Definice 10

Bud' $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ neomezená množina. Řekneme, že posloupnost omezených množin $\{M_n\}$, $M_n \subseteq \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, *vyčerpává množinu Ω* , jestliže

- 1 Platí $M_n \subset \Omega$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Ke každému $r > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq m$ platí $\Omega \cap K(r) \subset M_n$.

- Množiny M_n nemusí být souvislé.
- Posloupnost množin M_n nemusí být monotónní vzhledem k inkluzi.

Uvažujme funkci f definovanou na neomezené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. O funkci f učiníme následující předpoklad.

Předpoklad 2

Funkce f je integrovatelná na každé (omezené) měřitelné množině $M \subset \Omega$.

Definice 11

Nechť funkce f je definovaná na neomezené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ a splňuje Předpoklad 2. Řekneme, že **nevlastní integrál** z funkce f **konverguje** na množině Ω , jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{M_n} f(x, y) \, dx dy = K$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$, která vyčerpává množinu Ω . Pak píšeme

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = K.$$

V opačném případě, tj. pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál z funkce f na množině Ω **diverguje**.

Příklad 12

Ukažte, že nevlastní integrál

$$\iint_{\Omega} \sin(x^2 + y^2) \, dx dy, \quad \Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\},$$

diverguje.

Najdeme dvě vyčerpávající posloupnosti $\{K_n\}$ a $\{M_n\}$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} \sin(x^2 + y^2) \, dx dy \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{M_n} \sin(x^2 + y^2) \, dx dy.$$

Tím bude dokázáno, že daný integrál diverguje.

Označme

$$K_R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$M_a = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$$

pro $R > 0$, $a > 0$. Pak transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_{K_R} \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho \sin \rho^2 \, d\rho \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{-\cos \rho^2}{2} \right]_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - \cos R^2), \end{aligned}$$

tedy limita $\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{K_R} \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy$ neexistuje.

Oproti tomu

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{M_a} \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{M_a} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) \, dx \, dy \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_0^a \sin x^2 \, dx \int_0^a \cos y^2 \, dy \right) + \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_0^a \cos x^2 \, dx \int_0^a \sin y^2 \, dy \right) \\ &= 2 \int_0^\infty \sin x^2 \, dx \int_0^\infty \cos x^2 \, dx = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

protože pro Fresnelovy integrály platí (např. pomocí metod komplexní analýzy)

$$\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \int_0^\infty \cos x^2 \, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Přitom posloupnosti $\{K_n\}$, $\{M_n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, jsou posloupnosti množin vyčerpávající Ω .

Nyní je možné přenést na tento typ nevlastního integrálu všechna tvrzení z předchozí sekce. Zejména platí, že každý integrál konverguje absolutně. (Důkazy jsou téměř analogické.)

Příklad 13

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je vnějšek otevřeného kruhu se středem v bodě $[x_0, y_0]$ a poloměrem $R > 0$ a α je reálné číslo. Označme

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Dokažte, že nevlastní integrál

$$\iint_M \frac{dx dy}{r^\alpha}$$

konverguje pro $\alpha > 2$ a diverguje pro $\alpha \leq 2$.

Výpočet bude podobný jako v příkladu 11.

Označme K_n mezikruží se středem v bodě $A = [x_0, y_0]$, vnitřním poloměrem R a vnějším poloměrem n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, kde $n_0 = \lfloor R \rfloor + 1$. Posloupnost $\{K_n\}$ zřejmě vyčerpává množinu M .

Vypočítáme integrály

$$\iint_{K_n} \frac{dx dy}{r^\alpha}, \quad n \geq n_0.$$

Protože množina K_n je mezikružím se středem v bodě A s poloměry R a n , použijeme transformaci, která je složením transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (x_0, y_0) . Tedy

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \quad y = y_0 + \rho \sin \varphi, \quad J = \rho.$$

Množina K_n je obrazem obdélníku $L_n = [R, n] \times [0, 2\pi]$.

Dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_{K_n} \frac{dx dy}{r^\alpha} &= \iint_{L_n} \frac{\rho \, d\rho d\varphi}{\rho^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^n \rho^{1-\alpha} \, d\rho \\ &= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_R^n = \frac{2\pi}{2-\alpha} (n^{2-\alpha} - R^{2-\alpha}) & \text{pro } \alpha \neq 2, \\ 2\pi [\ln \rho]_R^n = 2\pi (\ln n - \ln R) & \text{pro } \alpha = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Odtud je vidět, že pro $\alpha > 2$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} \frac{dx dy}{r^\alpha} = \frac{2\pi R^{2-\alpha}}{\alpha - 2}$$

a pro $\alpha \leq 2$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} \frac{dx dy}{r^\alpha} = \infty.$$

Protože integrand $1/r^\alpha$ je kladná funkce, podle analogie Důsledku 2 integrál konverguje právě pro $\alpha > 2$.

Uvažujme přirozená čísla p, q a označme jejich součet $p + q = k$. Dále uvažujme funkci k proměnných $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = f(x, y).$$

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^p$ a $B \subseteq \mathbb{R}^q$ jsou měřitelné množiny a nechť je funkce $f(\cdot, y)$ integrovatelná na A . Definujme funkci $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$g(y) = \int_A f(x, y) \, dx.$$

Poznámka

Protože předchozí tvrzení formulovaná pro integrál v $\mathbb{R}^2$ lze analogicky dokázat i pro integrály v $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, budeme se na tato tvrzení odvolávat ve smyslu jejich zobecnění v $\mathbb{R}^k$.

Věta 26

Nechť je f spojitá na $A \times B$, kde A a B jsou kompaktní měřitelné množiny. Potom je funkce g spojitá na množině B , tj.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_A f(x, y) \, dx = \int_A \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] \, dx.$$

Poznámka

Protože platí

- Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina. (Spojité zobrazení mezi metrickými prostory.)
- Je-li daná množina v metrickém prostoru kompaktní, pak je uzavřená a ohraničená.

je funkce f ohraničená a vzhledem k Větě 11 je integrovatelná. Tedy funkce g je zavedena korektně.

Důkaz.

Nejprve vyřešme případ $m(A) = 0$. Potom dle Věty 10 je $g(y) = 0 \forall y \in B$ a tvrzení triviálně platí.

Nyní nechť $m(A) > 0$ a $y_0 \in B$ je libovolný bod a $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Dále označme

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2m(A)}.$$

Protože f je spojitá na kompaktní množině $A \times B$, je zde spojitá stejnoměrně, tj. k $\tilde{\varepsilon} > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \tilde{\varepsilon}$$

pro každé $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$ splňující $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta$. Tento fakt použijeme spolu s linearitou integrálu vzhledem k funkci (Věta 7), monotonii vzhledem k funkci (Věta 12) a integrálu absolutní hodnoty (Věta 13).

Pro libovolné $y \in B$ splňující $\rho(y, y_0) < \delta$ platí

$$\begin{aligned} |g(y) - g(y_0)| &= \left| \int_A f(x, y) \, dx - \int_A f(x, y_0) \, dx \right| \\ &= \left| \int_A f(x, y) - f(x, y_0) \, dx \right| \leq \int_A |f(x, y) - f(x, y_0)| \, dx \\ &\leq \int_A \tilde{\varepsilon} \, dx = \tilde{\varepsilon} m(A) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

tedy funkce g je v y_0 spojitá. □

Věta 27

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^p$ je kompaktní měřitelná množina a nechť je funkce f spojitá na množině $A \times [a, b]$ a má na této množině spojitou parciální derivaci podle poslední proměnné. Pak má funkce $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(y) = \int_A f(x, y) \, dx,$$

na intervalu $[a, b]$ spojitou derivaci a platí

$$g'(y) = \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \, dx.$$

Důkaz.

Nechť $y \in [a, b]$ je libovolné. Zaved'me funkci $\varphi: A \times [-\delta, \delta]$, $\delta = \min\{b - y, y - a\}$, jako

$$\varphi(x, h) = \begin{cases} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}, & h \neq 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, & h = 0. \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá, protože $\partial f / \partial y$ je spojitá. Dle Věty 26 je spojitá i funkce

$$\psi(h) = \int_A \varphi(x, h) \, dx, \quad \psi: [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R},$$

tj.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) = \int_A \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x, h) \, dx = \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \, dx.$$

Tedy

$$\begin{aligned} g'(y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_A \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \, dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_A \varphi(x, h) \, dx = \lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) = \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \, dx. \end{aligned}$$

Funkce g má tedy v y derivaci, jejíž spojitost na $[a, b]$ plyne z Věty 26 a ze spojitosti $\partial f / \partial y$ na $A \times [a, b]$. □

Věta 28

Nechť je f spojitá na měřitelné množině $A \times B$, kde A a B jsou měřitelné. Pak platí

$$\int_B \left[\int_A f(x, y) \, dx \right] dy = \int_A \left[\int_B f(x, y) \, dy \right] dx.$$

Důkaz.

Spojitosť funkce f zajišťuje integrovatelnost $f(\cdot, y)$ na $A \quad \forall y \in B$ a integrovatelnost $f(x, \cdot)$ na $B \quad \forall x \in A$. Tvrzení pak dokážeme pomocí Fubiniovy věty. □

Věta 29

Nechť je f spojitá na množině $(a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R}^2$ a má zde spojitou parciální derivaci podle druhé proměnné. Dále necht' φ, ψ jsou funkce definované na intervalu (c, d) , mají na něm derivaci a splňují

$$a < \varphi(y) < b, \quad a < \psi(y) < b, \quad \forall y \in (c, d).$$

Pak má funkce

$$g(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) \, dx, \quad g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R},$$

derivaci na (c, d) a platí

$$g'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \, dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y).$$

Důkaz.

Zavedeme funkci

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y) \, dx, \quad F: (c, d)^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

potom podle Věty 27

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \, dx$$

a s využitím věty o derivaci integrálu jako funkce horní meze máme

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u, y), \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f(v, y).$$

Tedy funkce má spojitě parciální derivace a podle věty o derivaci složené funkce dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y + F_u \frac{\partial u}{\partial y} + F_v \frac{\partial v}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx - f(u, y)u' + f(v, y)v',$$

což potvrzuje, vzhledem k $g(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y))$, tvrzení věty. □

Příklad 14

Dokažte, že integrál

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

konverguje absolutně pro každé $x > 0$.

Rozdělme integrační obor na dvě části např. číslem 1.

- Pro $x \in [1, \infty)$ integrál $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ není nevlastní.
- Pro $x \in (0, 1)$ použijeme limitní srovnávací kritérium pro jednoduché nevlastní integrály. Uvažujme číslo $\delta \in (0, x)$ a počítejme

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|e^{-t} t^{x-1}|}{\frac{1}{t^{1-\delta}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} t^{x-\delta} = 0 < \infty.$$

Protože nevlastní integrál $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ konverguje pro $\alpha < 1$ a máme $1 - \delta < 1$, konverguje i integrál $\int_0^1 |e^{-t} t^{x-1}| dt$.

- Nyní uvažujme integrál $\int_1^\infty |e^{-t} t^{x-1}| dt$. Opět použijeme limitní srovnávací kritérium pro jednoduché nevlastní integrály. Porovnávat budeme s $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ o kterém víme, že konverguje. Tedy

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|e^{-t} t^{x-1}|}{\frac{1}{t^2}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{x+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} e^{\ln t^{x+1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(x+1) \ln t - t} \stackrel{(*)}{=} 0 < \infty. \end{aligned}$$

Tedy $\Gamma(x)$ skutečně absolutně konverguje $\forall x > 0$.

(*) Protože $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{\text{l'Hosp.}}{=} 0$, máme

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [(x+1) \ln t - t] &= \left| t = \frac{1}{u}, u \rightarrow 0^+ \right| = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[(x+1) \ln \frac{1}{u} - \frac{1}{u} \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-(x+1)u \ln u - 1}{u} = -\infty. \end{aligned}$$

Příklad 15

Dokažte, že pro každé $x > 0, n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\Gamma(x + n + 1) = \Gamma(x) \prod_{i=0}^n (x + i) \quad (4)$$

Budeme postupovat indukcí.

- Pro $n = 0$ snadno spočítáme

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \left| \begin{array}{ll} u = t^x & u' = xt^{x-1} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array} \right| \\ &= -[t^x e^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x). \end{aligned}$$

- Nyní předpokládejme platnost (4) a proved' me indukční krok

$$\begin{aligned}\Gamma(x+n+2) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x+n+1} dt \\ &\quad \left| \begin{array}{ll} u = t^{x+n+1} & u' = (x+n+1)t^{x+n} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array} \right| \\ &= -[t^{x+n+1} e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty (x+n+1) e^{-t} t^{x+n} dt = (x+n+1)\Gamma(x+n+1).\end{aligned}$$

Poznámka

Protože

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

plyne z příkladu 15 vztah

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

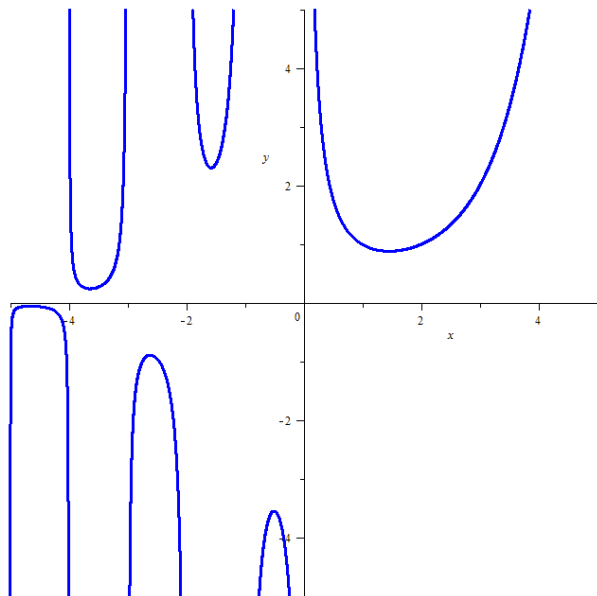
Definice 12

Eulerovu Gamma funkci definujeme jako

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, & x > 0, \\ \frac{\Gamma(x - \lfloor x \rfloor)}{x(x+1)\dots(x - \lfloor x \rfloor - 1)}, & x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Poznámka

- Tedy $D(\Gamma) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.
- Gamma funkci lze definovat pro libovolné komplexní číslo mimo $\{0, -1, -2, \dots\}$.



Věta 30

Pro každé $x \in D(\Gamma)$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(x) = \Gamma(x - n) \prod_{i=1}^n (x - i). \quad (5)$$

Důkaz.

Pro $x > 0$ plyne z příkladu 15 vztah $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, který je dle definice 12 platný i pro $x \in (-1, 0)$ ($\lfloor x \rfloor = -1$). Pro $x < -1$ máme

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \frac{\Gamma(x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor)}{(x + 1)(x + 2) \dots (x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor - 1)} \\ &= x \frac{\Gamma(x - \lfloor x \rfloor)}{x(x + 1)(x + 2) \dots (x - \lfloor x \rfloor - 1)} = x\Gamma(x). \end{aligned}$$

Vztah (5) získáme indukcí. □

Poznámka

Díky Větě 30 stačí znát hodnotu $\Gamma(x)$ pro $x \in (0, 1]$ a pro jakékoli jiné (reálné) $x \in D(\Gamma)$ hodnotu snadno dopočítáme.

Poznámka

Často se můžeme setkat i s Eulerovou Beta funkcí

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

Příklad 16

Pomocí funkce $B(x, y)$ vypočítejte

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Snadno spočítáme

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} &= B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \\ &= \left| t = \sin^2 u \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin u \cos u}{\sin u \cos u} du = \pi. \end{aligned}$$

Tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx &= \left| x^2 = u \right| = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{2}-1} du \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 17

Vypočítejte

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

bez použití funkce $B(x, y)$.

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= |\text{polární souř.}| = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \rho d\varphi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \\ &= |\rho^2 = t| = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{4} [-e^{-t}]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

tedy skutečně $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Další vlastnosti funkce $\Gamma(x)$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \Gamma(x) = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)} = 1 \quad (\text{Stirlingův vzorec}) \Rightarrow n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$
pro velká n .
- $\frac{d^n \Gamma(x)}{dx^n} = \int_0^\infty (e^{-t} t^{x-1} \ln^n t) dt$ pro $x > 0$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$
- $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}.$
- ... a mnohem víc.

Definice 13

Nechť $\varphi(t), \psi(t)$ jsou spojité na $[\alpha, \beta]$. Pak množinu

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{E}^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$$

nazýváme *spojitou křivkou* a rovnice $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ nazýváme *parametrické rovnice*.

Definice 14

Křivka C s parametrickým vyjádřením $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ se nazývá *hladká*, jestliže φ, ψ mají spojité derivace na $[\alpha, \beta]$ a v každém $t_0 \in [\alpha, \beta]$ je alespoň jedna z nich nenulová, tj.

$$\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) > 0, \quad \forall t_0 \in [\alpha, \beta].$$

Křivka C se nazývá *po částech hladká*, jestliže $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$, kde C_i jsou hladké křivky.

Poznámka

- Křivka je spojitý obraz kompaktního intervalu do $\mathbb{R}^n(\mathbb{E}^n)$. Definující zobrazení se nazývá *parametrizace křivky*, např.

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

- Pokud $\Phi(a) = \Phi(b)$, mluvíme o *uzavřené křivce*.
- Pokud je Φ na $[a, b]$ prosté, mluvíme o *oblouku*. (Křivka nikde neprotíná sama sebe.)
- Pokud je Φ prosté na $[a, b]$ a $\Phi(a) = \Phi(b)$, mluvíme o *Jordanově křivce*. (Spojitý a prostý obraz kružnice.)
- Oblouk a Jordanova křivka jsou *jednoduché křivky*.
- Jordanova křivka v rovině (popř. na ploše) rozděluje tuto rovinu na dvě části – *vnitřek* (omezená část) a *vnějšek* (neomezená část).
- Každá křivka má nekonečně mnoho různých parametrizací.

Příklad 18

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [-a, a]$$

parametrizace

- $x = a \cos t, y = a \sin t, t \in [0, \pi],$
- $x = t, y = \sqrt{a^2 - t^2}, t \in [-a, a].$

Příklad 19

$$y = f(x), x \in [a, b] \quad \longleftrightarrow \quad x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$$

→ např. $x = t, y = f(t), t \in [a, b],$

← $\varphi' \neq 0 \Rightarrow y = \psi(\varphi^{-1}(x)), x \in [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)].$

(Např. $S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) |\varphi'(t)| dt \dots$ počítá se přímo z parametrických rovnic.)

Poznámka

$$(i) \int_a^b f(x) dx$$

- ① dělení intervalu $[a, b]$
- ② dolní a horní součty – aproximace obdélníky
- ③ limitní přechod
 - V1) všechna dělení $\rightarrow$ sup a inf dolních a horních součtů
 - V2) $\{D_n\}$ nulová posl. $\rightarrow$ limita posloupnosti integrálních součtů

$$(ii) \int_C f(x, y) d\ell$$

- ① dělení křivky C
- ② aproximace obdélníky
- ③ limitní přechod (V2)

Definice 15

Nechť C je po částech hladká rovinná křivka a $f(x, y)$ je omezená funkce definovaná na C .

- *Dělení křivky* rozumíme konečnou posloupnost bodů $D = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, oblouky (A_{i-1}, A_i) nazýváme *dělicí intervaly* dělení D , délku oblouku (A_{i-1}, A_i) označíme $\Delta \ell_i$.
- Číslo $\nu(D) = \max_{0 \leq i \leq n} \Delta \ell_i$ nazýváme *norma dělení*.

Na každém oblouku (A_{i-1}, A_i) zvolme bod $\xi_i, i = 1, \dots, n$, libovolně (volba reprezentantů). Utvořme *integrální součet* výběr reprezentantů K a dělení D

$$\mathcal{S}(D, f, K) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta \ell_i.$$

Nechť $\{D_n\}$ je nulová posloupnost dělení (tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$). Má-li integrální součet limitu L ($L < \infty$) pro nulovou posloupnost dělení a tato limita nezávisí na výběru reprezentantů, nazývá se L *křivkový integrál prvního druhu* funkce f na křivce C a značíme jej

$$\int_C f(x, y) \, d\ell = L.$$

Vztah mezi křivkovým a Riemannovým integrálem

$$\text{a) } C : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow d\ell = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

$$\int_C f(x, y) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

$$\text{b) } C : y = y(x), x \in [a, b] \Rightarrow d\ell = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

$$\int_C f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

Vlastnosti křivkového integrálu jsou analogické vlastnostem Riemannova integrálu (plyne to z konstrukce)

① Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_C [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] \, d\ell = \alpha \int_C f(x, y) \, d\ell + \beta \int_C g(x, y) \, d\ell.$$

② Je-li křivka C určena obloukem AB , pak pro libovolné K ležící na AB platí

$$\int_{AB} f(x, y) \, d\ell = \int_{AK} f(x, y) \, d\ell + \int_{KB} f(x, y) \, d\ell.$$

Příklad 20

Vypočtete $\int_C (x - y) \, d\ell$, kde

$$C : x^2 + y^2 = ax, \quad a > 0.$$

Máme $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$, tedy parametrizujeme jako

$$\begin{aligned} x - \frac{a}{2} &= \frac{a}{2} \cos t, & dx &= -\frac{a}{2} \sin t \, dt, \\ y &= \frac{a}{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], & dy &= \frac{a}{2} \cos t \, dt. \end{aligned}$$

Tedy $d\ell = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} \, dt = \sqrt{\frac{a^2}{4} \sin^2 t + \frac{a^2}{4} \cos^2 t} \, dt = \frac{a}{2} \, dt$, proto

$$\begin{aligned} \int_C (x - y) \, d\ell &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t - \frac{a}{2} \sin t \right) \frac{a}{2} \, dt \\ &= \frac{a^2}{4} [t + \sin t + \cos t]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{4} 2\pi = \frac{a^2 \pi}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 21

Vypočtete $\int_C (x + y^2) \, d\ell$, kde C je úsečka mezi body $A = [2, -1]$, $B = [1, 3]$.

$$x = 2 - t,$$

$$dx = -dt,$$

$$y = -1 + 4t, \quad t \in [0, 1],$$

$$dy = 4 \, dt.$$

Tedy $d\ell = \sqrt{1 + 16} \, dt = \sqrt{17} \, dt$, proto

$$\begin{aligned} \int_C (x + y^2) \, d\ell &= \int_0^1 (2 - t + 1 - 8t + 16t^2) \sqrt{17} \, dt \\ &= \sqrt{17} \left[3t - 9\frac{t^2}{2} + 16\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{23}{6} \sqrt{17}. \end{aligned}$$

Příklad 22

Vypočtěte (asteroida)

$$I = \int_C \left(x^{4/3} + y^{4/3} \right) d\ell, \quad C : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0.$$

$$x = a \cos^3 t,$$

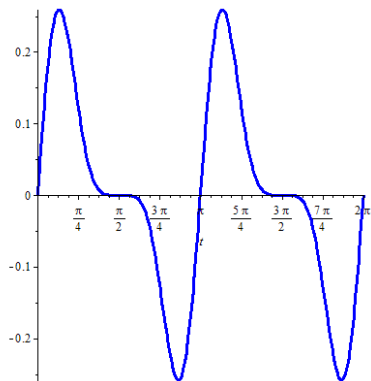
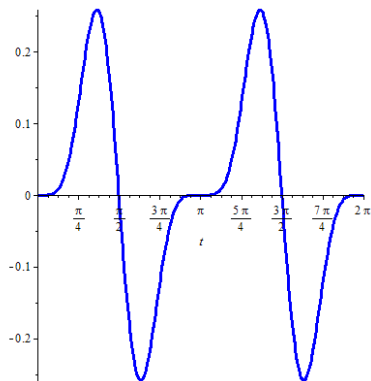
$$dx = (-3a \cos^2 t \sin t) dt,$$

$$y = a \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$dy = (3a \sin^2 t \cos t) dt.$$

Tedy $d\ell = 3a |\cos t \sin t| dt$, proto

$$\begin{aligned} I &= a^{4/3} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) 3a |\cos t \sin t| dt \\ &= 12a^{7/3} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^5 t \sin t dt + \int_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos t dt \right) \\ &= 2a^{7/3} [-\cos^6 t]_0^{\pi/2} + 2a^{7/3} [\sin^6 t]_0^{\pi/2} = 4a^{7/3}. \end{aligned}$$

Obr.: $\cos^5 t \sin t$ Obr.: $\sin^5 t \cos t$

Mějme dvojici funkcí $P(x, y)$, $Q(x, y)$ a zobrazení

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \mapsto [P(x, y), Q(x, y)],$$

F se nazývá *vektorová funkce*.

Nechť C je po částech hladká křivka v rovině. Nechť je na této křivce definováno úplné uspořádání jejích bodů, tomuto uspořádání se říká *orientace křivky*.

Jestliže je křivka jednoduchá (sama sebe neprotíná), je orientace dána uspořádáním libovolné dvojice bodů. Je-li křivka uzavřená, je orientace dána uspořádáním trojice bodů. (Orientace = směr pohybu po křivce.)

Nechť $T_0, \dots, T_n \in C$ je dělení křivky C , $T_i = [x_i, y_i]$, $i = 0, \dots, n$.

Dále nechť $[\xi_i, \eta_i] \in T_i T_{i+1}$ (oblouk křivky mezi body T_i, T_{i+1} , $i = 0, \dots, n-1$).

Označme $K_n = \{[\xi_i, \eta_i], i = 0, \dots, n-1\}$, $D_n = \{T_0, \dots, T_n\}$ a $\nu(D_n)$ délku nejdelšího oblouku křivky C určeného dělením D_n .

Vytvořme součet

$$\varphi(D_n, F, K_n) = \sum_{i=0}^{n-1} [P(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i) + Q(\xi_i, \eta_i)(y_{i+1} - y_i)].$$

Předpokládejme, že existuje konečná limita

$$\lim_{\nu(D_n) \rightarrow 0} \varphi(D_n, F, K_n) = L$$

a tato limita nezávisí na výběru reprezentantů K_n příslušejících dělení D_n . Předpokládejme, že pořadí dělicích bodů $T_0, \dots, T_n$ je souhlasné s orientací křivky ($T_i \rightarrow T_{i+1}$). Pak definujeme

$$\int_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = L.$$

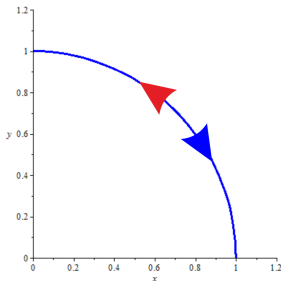
Nechť $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$ je parametrické vyjádření orientované křivky C a $\prec$ je uspořádání na křivce dané její orientací. Řekneme, že toto parametrické vyjádření je *souhlasné*, jestliže pro $t_1 < t_2$ je

$$[\varphi(t_1), \psi(t_1)] \prec [\varphi(t_2), \psi(t_2)].$$

Podobně nazveme toto parametrické vyjádření *nesouhlasné (opačné)*, jestliže pro $t_1 < t_2$ je

$$[\varphi(t_1), \psi(t_1)] \succ [\varphi(t_2), \psi(t_2)].$$

Příklad 23



C je část kružnice $x^2 + y^2 = 1$ v prvním kvadrantu, orientovaná ve směru hodinových ručiček. Parametrizace $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi/2]$ je nesouhlasná, protože když zvětšujeme t , pohybujeme se proti směru hodinových ručiček.

Převod na Riemannův integrál

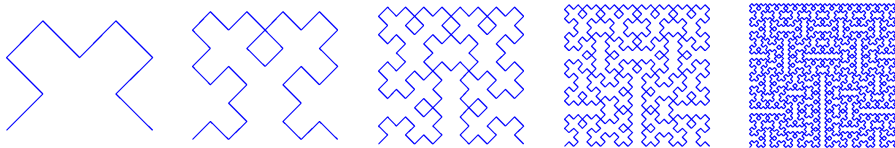
$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy \\ = \pm \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] \, dt, \end{aligned}$$

kde znaménko je dáno parametrizací, tj. plus je-li souhlasná s orientací křivky a minus je-li nesouhlasná.

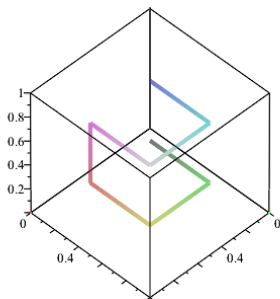
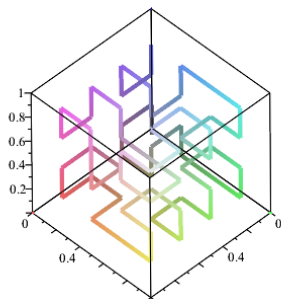
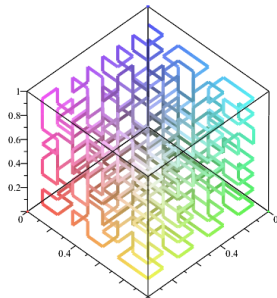
Poznámka (Spojitost vs. hladkost)

$[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$, $\varphi, \psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $C = \{[x, y] : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$, jsou-li φ, ψ spojité, pak je C spojitá křivka.

Peanova křivka (viz také Hilbertova křivka) pokryje celý jednotkový čtverec, tj. $[0, 1] \mapsto [0, 1] \times [0, 1]$.

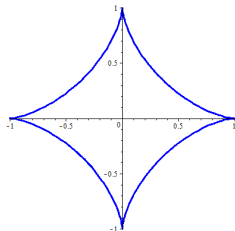


(Hladká křivka = v každém bodě lze sestavit tečnu.)



Příklad 24

Uvažujme asteroidu s parametrizací



$$\begin{aligned}x(t) &= a \cos^3 t, \\y(t) &= a \sin^3 t, \\a > 0, \quad t &\in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Protože

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t,$$

tedy

$$x'(t_0) = 0 \wedge y'(t_0) = 0 \quad \text{pro } t_0 \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\},$$

je zřejmé, že asteroida není hladká (je po částech hladká, jednoduchá a uzavřená).

Příklad 25

Křivka

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} -t^2 & t < 0 \\ t^2 & t \geq 0 \end{cases}, \quad y = \psi(t) = t^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

má $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$, tedy není hladká na žádném intervalu obsahujícím nulu. (Jde o $y = |x|$.)

Poznámka

- $\int_{\alpha}^{\beta} (P\varphi' + Q\psi') dt$, $P\varphi' + Q\psi' = \langle \vec{F}, \vec{t} \rangle$, kde $\vec{t} = (\varphi', \psi')$.
- Jiný zápis $\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ (skalární součin).

Vztah mezi integrálem prvního a druhého druhu

$$\begin{aligned}
 \int_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy &= \left| \begin{array}{l} C : x = \varphi(t), y = \psi(t) \\ t \in [\alpha, \beta], \text{ souhlasně} \end{array} \right| \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi'] \, dt = | \text{hladká křivka} | \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(\varphi, \psi) \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} + Q(\varphi, \psi) \frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \right] \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} \, dt \\
 &= \int_C [P(x, y) \cos \gamma(x, y) + Q(x, y) \sin \gamma(x, y)] \, dl,
 \end{aligned}$$

kde $\gamma(x, y)$ je úhel, který svírá tečna ke křivce v bodě $[x, y]$ s kladnou poloosou x .

Věta 31

Pro počítání křivkového integrálu druhého druhu platí obvyklé vztahy. Zejména

$$\begin{aligned} \int_C ([\alpha P_1(x, y) + \beta P_2(x, y)] dx + [\alpha Q_1(x, y) + \beta Q_2(x, y)] dy) \\ = \alpha \int_C P_1(x, y) dx + Q_1(x, y) dy \\ + \beta \int_C P_2(x, y) dx + Q_2(x, y) dy, \end{aligned}$$

$$C = C_1 \cup C_2 \Rightarrow \int_C P dx + Q dy = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy.$$

Příklad 26

Vyčíslete

$$\int_C (x^2 - 2xy) \, dx + (2xy + y^2) \, dy,$$

kde C je oblouk paraboly z bodu $[0, 0]$ do bodu $[1, 1]$.

Základní parametrizace $x = t, y = t^2, t \in [0, 1]$, je souhlasně orientovaná, takže

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 - 2xy) \, dx + (2xy + y^2) \, dy &= + \int_0^1 (t^2 - 2t \cdot t^2) \cdot 1 + (2t \cdot t^2 + t^4) \cdot 2t \, dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} = \frac{29}{30}. \end{aligned}$$

Poznámka

Křivkový integrál po uzavřené křivce

$$C : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta], \quad \varphi(\alpha) = \varphi(\beta), \psi(\alpha) = \psi(\beta),$$

budeme značit

$$\oint_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy.$$

Definice 16

Řekneme, že množina $G \subseteq \mathbb{R}^2$ (popř. $\mathbb{R}^3$) je

- *(obloukovitě) souvislá*, jestliže libovolné dva body v ní lze spojit obloukem, který leží celý v G ,
- *oblast*, jestliže je otevřená a souvislá,
- *jednoduše souvislá oblast*, jestliže je to oblast, ve které lze každou jednoduchou uzavřenou křivku stáhnout do bodu bez opuštění množiny G .

Poznámka

Množina $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je *jednoduše souvislá oblast*, pokud je G otevřená, souvislá (libovolné dva body lze spojit lomenou čarou, která leží v G) a s každou uzavřenou křivkou leží v G i vnitřek této křivky.

(Lze definovat i vícenásobně souvislou oblast.)

Věta 32 (Greenova věta)

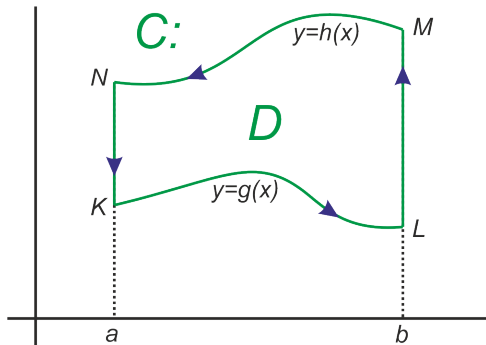
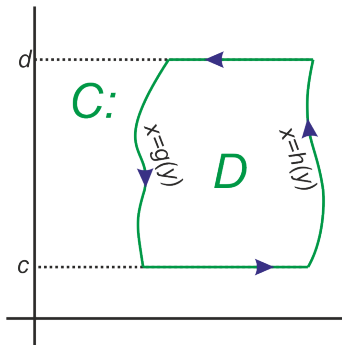
Nechť G je jednoduše souvislá oblast v rovině, C je uzavřená, kladně orientovaná (proti směru hod. ručiček) křivka v G . Dále nechť funkce $P, Q, P_y, Q_x: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou na uzávěru množiny G spojité. Pak platí

$$\oint_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \iint_D [Q_x(x, y) - P_y(x, y)] \, dx \, dy,$$

kde D je část množiny G omezená křivkou C .

Důkaz.

Nejprve uvažme případy, kdy křivka C je křivočarý obdélník popsany na následujících obrázcích.

Obr.: Příklad 1_a)Obr.: Příklad 1_b)

1_a) Dle Fubiniho věty ihned dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_D [-P_y(x, y)] \, dx \, dy &\stackrel{[F.V.]}{=} - \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} P_y(x, y) \, dy \, dx \\ &= - \int_a^b [P(x, h(x)) - P(x, g(x))] \, dx \end{aligned}$$

a protože

$$\begin{aligned} \oint_C P(x, y) \, dx &= \left(\int_K^L + \int_L^M + \int_M^N + \int_N^K \right) P(x, y) \, dx \\ &= \int_a^b P(x, g(x)) \, dx - \int_a^b P(x, h(x)) \, dx, \end{aligned}$$

máme

$$\iint_D [-P_y(x, y)] \, dx \, dy = \oint_C P(x, y) \, dx.$$

V předchozím výpočtu jsme použili

$$\int_K^L P(x, y) \, dx = \left| x = t, y = g(t) \right| = \int_a^b P(t, g(t)) \, dt,$$

$$\int_L^M P(x, y) \, dx = \left| x = b, y = t, t \in [g(b), h(b)], dx = 0 \right| = 0,$$

$$\int_M^N P(x, y) \, dx = \left| x = t, y = h(t) \right| = - \int_a^b P(t, h(t)) \, dt,$$

$$\int_N^K P(x, y) \, dx = \left| x = a, y = t, t \in [g(a), h(a)], dx = 0 \right| = 0.$$

1_b) Zcela analogicky zjistíme, že

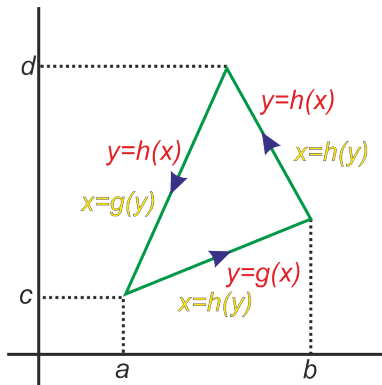
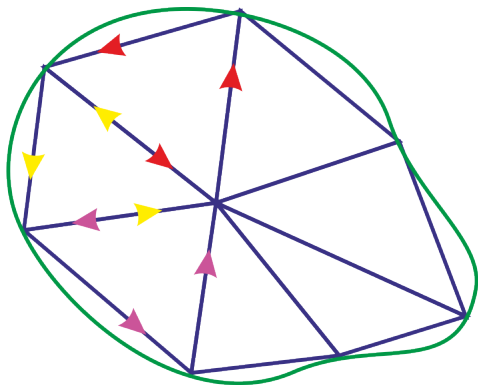
$$\iint_D Q_y(x, y) \, dx \, dy = \oint_C Q(x, y) \, dy.$$

- 2) Je-li křivka C trojúhelník, platí oba vzorce současně, tj.

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy.$$

- 3) Je-li C „obecná“ křivka, pak na každý trojúhelník aplikujeme Greenovu větu. Když jdeme s počtem vrcholů mnohoúhelníku k nekonečnu, tak mnohoúhelník lépe vykrývá vnitřek křivky, tedy integrál přes mnohoúhelník se blíží integrálu přes vnitřek křivky. A obdobně (viz konstrukce křivkového integrálu) se integrál přes obvod mnohoúhelníku blíží k integrálu přes C .





Důsledek 3

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená a měřitelná množina, která je v $\mathbb{R}^2$ omezená křivkou C . Pak platí

$$m(A) = \frac{1}{2} \oint_C (-y \, dx + x \, dy),$$

kde C je orientovaná v kladném smyslu.

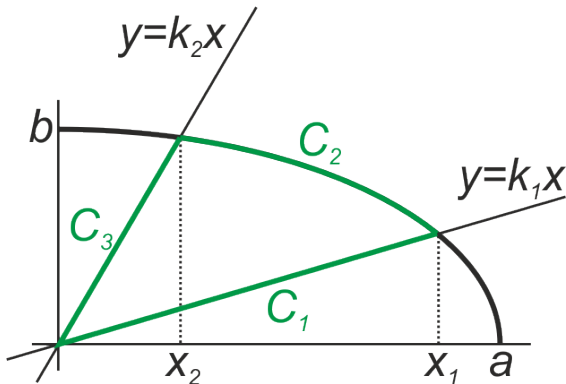
Důkaz.

$$\frac{1}{2} \oint_C (-y \, dx + x \, dy) \stackrel{[\text{Green}]}{=} \frac{1}{2} \iint_A (1 + 1) \, dx \, dy = \iint_A 1 \, dx \, dy = m(A)$$



Příklad 27

Vypočtete míru výseče z elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) v prvním kvadrantu omezené polopřímkami $y = k_1x$, $y = k_2x$, $0 \leq k_1 < k_2$.



Označme $t_1 = \arctg k_1$ a $t_2 = \arctg k_2$.

Počítáme postupně pro jednotlivé části, nejprve

$$\int_{C_1} -y \, dx + x \, dy = \left| \begin{array}{l} x = t, \, dx = dt \\ y = k_1 t, \, dy = k_1 \, dt \end{array} \right| = \int_0^{x_1} (-k_1 t \, dt + t k_1 \, dt) = 0,$$

podobně i $\int_{C_3} -y \, dx + x \, dy = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{C_2} -y \, dx + x \, dy &= \left| \begin{array}{l} x = a \cos t, \, dx = -a \sin t \, dt \\ y = b \sin t, \, dy = b \cos t \, dt \\ t \in [t_1, t_2], \text{ souhl. orient.} \end{array} \right| \\ &= + \int_{t_1}^{t_2} [-b \sin t (-a \sin t) \, dt + a \cos t b \cos t \, dt] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} ab \sin^2 t + ab \cos^2 t \, dt = ab(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

tedy

$$m(A) = \frac{1}{2} \oint_C -y \, dx + x \, dy = \frac{1}{2} ab(t_2 - t_1).$$

Definice 17

Nechť G je souvislá oblast v rovině a body $A, B \in G$.

- Řekneme, že křivkový integrál $\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ *nezávisí na integrační cestě mezi body A, B* , pokud

$$\int_{C_1} P dx + Q dy = \int_{C_2} P dx + Q dy$$

pro libovolnou dvojici po částech hladkých křivek spojujících body A, B .

- Řekneme, že křivkový integrál $\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ *nezávisí na integrační cestě v G* , pokud nezávisí na integrační cestě mezi libovolnými dvěma body z G .

Věta 33

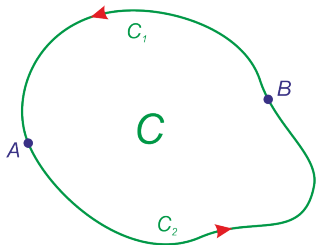
Nechť G je jednoduše souvislá oblast v rovině, funkce P, Q, P_y, Q_x jsou spojité na $\overline{G}$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) Integrál $\int_C P \, dx + Q \, dy$ nezávisí na integrační cestě v G .*
- (ii) Platí $\oint_C P \, dx + Q \, dy = 0$ pro libovolnou uzavřenou, po částech hladkou křivku v G .*
- (iii) Výraz $P \, dx + Q \, dy$ je totálním diferenciálem nějaké kmenové funkce H .*
- (iv) V G platí $P_y = Q_x$.*

Důkaz.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ je známo z diferenciálního počtu v $\mathbb{R}^2$.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$



Máme $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$, kde

$$\int_{A \rightarrow B} = - \int_{C_1} \quad \text{a} \quad \int_{A \rightarrow B} = \int_{C_2},$$

tedy $\int_{C_1} = - \int_{C_2} \Rightarrow \int_C = 0$.

(Opačnou implikaci např. sporem.)

$(iii) \Rightarrow (i)$ Necht' $A, B \in G$ a necht' $C = \{x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ spojuje souhlasně body A, B . Pak

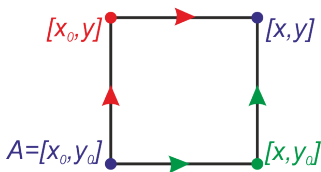
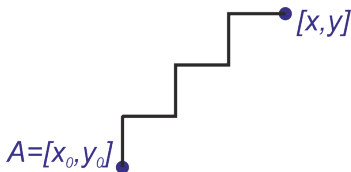
$$\begin{aligned}
 & \int_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] \, dt \\
 &= | \text{podle předpokladu } H_x = P, H_y = Q | \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} [H_x(\varphi, \psi)\varphi' + H_y(\varphi, \psi)\psi'] \, dt \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}[H(\varphi(t), \psi(t))] \, dt \\
 &= H(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - H(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = H(B) - H(A).
 \end{aligned}$$

Na křivku, přes kterou jsme integrovali, jsme nekladli žádné dodatečné požadavky.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Necht' $A = [x_0, y_0] \in G$ je libovolný a definujeme funkci

$$H(x, y) = \int_A^{[x, y]} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

což je křivkový integrál přes libovolnou po částech hladkou křivku začínající v A a končící v $B = [x, y]$. Díky platnosti (i) je H definováno korektně. Ověrmě, že jde o požadovanou kmenovou funkci. Jestliže to tvar G dovoluje, využijme pro ověření $H_x = P$ křivku (lomenou čáru, viz obrázek vlevo) $[x_0, y_0] \rightarrow [x_0, y] \rightarrow [x, y]$ a pro ověření $H_y = Q$ křivku $[x_0, y_0] \rightarrow [x, y_0] \rightarrow [x, y]$.



Jinak budeme postupovat dle obrázku vpravo.

Např. první výpočet je následující.

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_A^{[x,y]} P \, dx + Q \, dy \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{[x_0,y_0]}^{[x_0,y]} P \, dx + Q \, dy + \int_{[x_0,y]}^{[x,y]} P \, dx + Q \, dy \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\underbrace{\int_{y_0}^y Q(x_0, t) \, dt}_{\frac{\partial}{\partial x}=0} + \int_{x_0}^x P(t, y) \, dt \right] = P(x, y).\end{aligned}$$



Poznámka

Uvažujme

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad C : x^2 + y^2 = 1,$$

tedy máme

$$P_y = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad Q_x = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow P_y = Q_x$$

a parametrizaci křivky $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$.

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{1} (-\sin t) + \frac{\cos t}{1} \cos t \right] dt = 2\pi,$$

ale integrál po uzavřené křivce by měl být roven nule – funkce P, Q nejsou spojité v bodě $[0, 0]$ (příklad ukazuje, že předpoklad spojitosti funkcí P, Q, P_y, Q_x nelze vypustit).

Křivkový integrál prvního druhu

- Křivkový integrál prvního druhu $\int_C F(x, y) ds$ = obsah svislé plochy mezi funkcí $F(x, y)$ a křivkou C (v rovině xy).
- Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na orientaci křivky.
- Je-li křivka C uzavřená, píšeme

$$\oint_C F(x, y) ds.$$

- Má-li křivka C parametrické vyjádření

$$C = \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

pak

$$\int_C F(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

- Je-li $\tau(x, y)$ lineární hustota v bodě $[x, y]$, pak

funkce F	integrál z funkce F
1	délka křivky C
$\tau(x, y)$	hmotnost křivky C (m)
$y\tau(x, y)$	lineární moment vzhl. k ose x (U_x)
$x\tau(x, y)$	lineární moment vzhl. k ose y (U_y)
$y^2\tau(x, y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose x (J_x)
$x^2\tau(x, y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose y (J_y)

- Souřadnice težiště $[x_T, y_T]$:

$$x_T = \frac{U_y}{m}, \quad y_T = \frac{U_x}{m}.$$

Křivkový integrál druhého druhu

- Na těleso působí síla

$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ a to se pohybuje podél křivky C dané polohovým vektorem $\vec{r}$ (práce vykonaná silou $\vec{F}$).

$$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{r} = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

- Křivkový integrál druhého druhu závisí na orientaci křivky.
- Má-li křivka C parametrické vyjádření

$$C = \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

pak

$$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{r} = \pm \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right] dt.$$

- Je-li křivka C uzavřená, píšeme

$$\oint_C \vec{F}(x, y) d\vec{r}$$

= práce vykonaná silou $\vec{F}$ při přemístění tělesa po uzavřené křivce C
= cirkulace vektorového pole po křivce C .

- Tok vektorového pole křivkou C (použijeme normálovou složku):

$$\int_C -Q(x, y)dx + P(x, y)dy.$$

- Platí:

Integrál nezávisí na integrační cestě.



Lze zavést potenciální energii.

(Existuje kmenová funkce = – potenciál.)



Integrál po každé uzavřené křivce = 0.



Rotace vektorového pole = 0.



Integrál závisí jen na počátečním a koncovém bodě a je roven $\varphi(B) - \varphi(A)$, kde A je počáteční bod, B je koncový bod a φ je kmenová funkce.

Křivkový integrál 1. druhu

Uvažujme $\int_C G(x, y, z) \, d\ell$, kde C je prostorová křivka s parametrizací $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pak

$$\int_C G(x, y, z) \, d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} G(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} \, dt.$$

Příklad 28

Vypočtete délku jednoho závitu šroubovice

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$L = \int_C d\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Křivkový integrál 2. druhu

Uvažujme vektorovou funkci

$$\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

potom

$$\begin{aligned} \int_C [P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz] &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \left| x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [\alpha, \beta] \right| \\ &= \pm \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi, \psi, \chi)\varphi' + Q(\varphi, \psi, \chi)\psi' + R(\varphi, \psi, \chi)\chi'] \, dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{\langle (P, Q, R) \rangle}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\varphi', \psi', \chi')}_{\vec{t}} \, dt, \end{aligned}$$

kde $\vec{t}$ je tečný vektor ke křivce C .

Věta 34

Křivkový integrál $\int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz$, kde $P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité a mají spojité parciální derivace $P_y, P_z, Q_x, Q_z, R_x, R_y$ v $\mathbb{R}^3$, nezávisí na integrační cestě v $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když

- (i) Platí $\oint_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz = 0$ přes libovolnou uzavřenou křivku C .*
 - (ii) Výraz $P \, dx + Q \, dy + R \, dz$ je (totálním) diferenciálem nějaké kmenové funkce H , tj. $H_x = P, H_y = Q, H_z = R$.*
 - (iii) Platí $P_z = R_x, P_y = Q_x, Q_z = R_y$.*
- (Podmínky jsou ekvivalentní.)*

Definice 18

Nechť

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Řekneme, že vektorové pole F je *konzervativní (potenciálové)*, pokud výraz

$$P \, dx + Q \, dy + R \, dz$$

je (totálním) diferenciálem nějaké kmenové funkce H . Funkce $-H$ se nazývá *potenciál* konzervativního vektorového pole.

Příklad 29

Nechť

$$P(x, y, z) = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad Q(x, y, z) = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$R(x, y, z) = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Rozhodněte, zda je toto pole konzervativní. Pokud ano, určete jeho potenciál.

$$P_z = \frac{x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = R_x.$$

Ověříme zbývající podmínky a najdeme kmenovou funkci

$$H(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

(Laplaceův operátor $\Delta H = H_{xx} + H_{yy} + H_{zz} = 0$.)

Příklad 30

$$I = \int_{[1,1,1]}^{[2,2,2]} y^2 z^3 \, dx + 2xyz^3 \, dy + 3xy^2 z^2 \, dz = ?$$

$$\begin{aligned} P = H_x = y^2 z^3 &\Rightarrow H = xy^2 z^3 + C(y, z), \\ H_y = 2xyz^3 + C_y, &\quad H_z = 3xy^2 z^2 + C_z \end{aligned}$$

porovnáme s

$$Q = H_y = 2xyz^3, \quad R = H_z = 3xy^2 z^2.$$

Celkem $C_y = 0, C_z = 0 \Rightarrow C(y, z) = c$, tedy

$$I = \left[xy^2 z^3 \right]_{[1,1,1]}^{[2,2,2]} = (2 \cdot 4 \cdot 8) - (1 \cdot 1 \cdot 1) = 63.$$

Plošný integrál prvního druhu (ze skalární funkce)

- Nechť S je plocha v prostoru a bod o souřadnicích $[x, y, z]$ na této ploše má hustotu $\rho(x, y, z)$. Pak $\iint_S \rho(x, y, z) \, dS$ je hmotnost plochy.
- Je-li $\rho(x, y, z)$ bodový elektrický náboj, pak $\iint_S \rho(x, y, z) \, dS$ je náboj plochy S .
- Je-li $\rho \equiv 1$, pak $m(S) = \iint_S dS$.

Plošný integrál z vektorové funkce

Nechť $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ a S je plocha v $\mathbb{R}^3$. Potom $\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy$ představuje tok vektoru $\vec{F}$ plochou S . Máme $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $d\vec{S} = \vec{\nu} \cdot dS$ a $\vec{\nu}$ je normálový vektor k ploše S .

Plocha S je grafem funkce dvou proměnných

$$S = \{[x, y, z] : [x, y] \in M \subseteq \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\},$$

např. $S = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 \leq 1, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ je horní polokoule o poloměru $r = 1$.

Tečná rovina v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ je

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

tedy normálový vektor je $\vec{n} = \pm(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$.

Nechť S je plocha, která je grafem funkce

$$z = f(x, y), \quad [x, y] \in M \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Vezmeme síť řádu n v $\mathbb{R}^2$, ta vytvoří pokrytí množiny M , tj.

$$M = \bigcup_{i=1}^m D_i^n,$$

které přirozeným způsobem vytváří pokrytí $S = \bigcup_{i=1}^m S_i^n$, kde

$$S_i^n = \{[x, y, z] : [x, y] \in D_i^n, z = f(x, y)\},$$

neboť $[\xi_i, \eta_i] \in D_i^n \Rightarrow [\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)] \in S_i^n$. Předpokládejme, že funkce f má spojitě parciální derivace f_x, f_y (je diferencovatelná, lze sestavit tečnou rovinu).

Nechť τ_i je tečná rovina k S v bodě $[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$.

Označme $\tilde{S}_i$ „rovnoběžník“, který je průmětem D_i^n na τ_i . Vezměme rovinu $\tilde{\tau} : z = ax + by + c$ v $\mathbb{R}^3$ (bez újmy na obecnosti a pro naše účely $c = 0$).

Nechť $\diamond$ je rovnoběžník v $\tilde{\tau}$, jehož průmětem do podstavné roviny je čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$. Bodu $[1, 0]$ odpovídá bod $[1, 0, a]$ a bodu $[0, 1]$ bod $[0, 1, b]$. Tedy plocha rovnoběžníku $\diamond$ je

$$P_{\diamond} = \sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha},$$

kde

$$\cos \alpha = \left(\frac{\langle (1, 0, a), (0, 1, b) \rangle}{\sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2}} \right),$$

tedy

$$\begin{aligned} P_{\diamond} &= \sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{(1 + a^2)(1 + b^2)}} \\ &= \sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2) - a^2 b^2} = \sqrt{1 + a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Rovnice tečné roviny k S v bodě $[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$ je

$$z - f(\xi_i, \eta_i) = f_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i).$$

Plocha na tečné rovině, jejíž průmět do podstavné roviny je D_i^n , je

$$\sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot m(D_i^n).$$

Je-li síť vytvářející pokrytí množiny M dostatečně jemná, součet měr ploch na tečných rovinách je přibližně roven míře plochy S .

Zavedeme normu dělení plochy S . Pokrytí D_i^n množiny M vytváří pokrytí S_i^n plochy S , nechť $d(S_i^n)$ je průměr dílku S_i^n tak, jak byl průměr množiny definován v teorii metrických prostorů, tj.

$$(P, \rho), A \subset P : d(A) = \sup_A \rho(a_1, a_2).$$

Norma dělení $\nu = \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i^n)$. Předpokládáme, že funkce f má na M spojitě parciální derivace f_x, f_y , tzn. D_i^n je pokrytí M řádu n a $n \rightarrow \infty$, pak $\nu \rightarrow 0$. Vytvoříme součet $\sum_{i=1}^m m(\tilde{S}_i^n)$, kde $\tilde{S}_i^n$ jsou „rovnoběžníky“ na tečných rovinách, jejichž průměty jsou D_i^n .

Definice 19

Jestliže existuje konečná limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m m(\tilde{S}_i^n)$ a nezávisí na výběru reprezentantů $[\xi_i, \eta_i] \in D_i^n$, definujeme **míru plochy S** jako

$$m(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m m(\tilde{S}_i^n).$$

Poznámka

$$m(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m m(\tilde{S}_i^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot m(D_i^n).$$

Věta 35

Má-li funkce f spojité parciální derivace f_x, f_y na omezené a jednoduše souvislé množině M v $\mathbb{R}^2$ a

$$S = \{[x, y, z] : [x, y] \in M, z = f(x, y)\},$$

pak

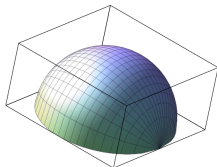
$$m(S) = \iint_M \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \, dx \, dy = \iint_M \|\vec{n}(x, y)\| \, dx \, dy,$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor $\vec{n} = \pm(f_x(x, y), f_y(x, y), -1)$.

Poznámka

Délka grafu funkce je $\ell = \int \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$. Při parametrizaci $x = \varphi(t), y = \psi(t), \vec{t} = (\varphi', \psi')$ máme $\ell = \int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} \, dt$.

Příklad 31



$$S : \begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ M : x^2 + y^2 \leq 1, \end{cases} \quad m(S) = ?$$

$$\begin{aligned} m(S) &= \iint_M \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy \\ &= \iint_M \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy \\ &= \iint_M \frac{dx \, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \left| x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \right| \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \, dr \, d\varphi = 2\pi \cdot \left[-\sqrt{1 - r^2} \right]_0^1 = 2\pi \end{aligned}$$

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je množina v rovině, která je omezená uzavřenou jednoduchou křivkou C (jednoduchá = neprotíná sebe sama). Nechť je dáno zobrazení $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ a toto zobrazení je definováno trojicí funkcí

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v).$$

Nechť

$$S = \Phi(M) = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), \right. \\ \left. [u, v] \in M \right\},$$

pak řekneme, že plocha S je *kousek plochy* parametricky zadaný trojicí funkcí φ, ψ, χ a množina

$$\Phi(C) = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), [u, v] \in C \right\}$$

se nazývá *kraj kousku plochy* S .

Poznámka

- Je-li S graf funkce jako v příkladu 31, pak máme $x = u, y = v, z = f(u, v)$, tedy S je kousek plochy.
- Válcová parametrizace horní polokoule je

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = \sqrt{1 - r^2}, r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi].$$

Odvození vztahu pro normálový vektor
parametricky zadaného kousku plochy

Předpokládejme, že funkce φ, ψ, χ mají na M spojitě parciální derivace a hodnost matice

$$\begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix}$$

je 2 pro každý bod $[u, v] \in M$. Označme

$$A(u, v) = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, B(u, v) = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}, C(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix},$$

$$H(u, v) = \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}.$$

Definice 20

Řekneme, že kousek plochy S je *hladký*, pokud mají funkce φ, ψ, χ spojitě parciální derivace a

$$H(u, v) \neq 0 \quad \forall [u, v] \in M.$$

Poznámka

$$H(u, v) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad h \begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix} = 2$$

Poznámka

Budeme uvažovat pouze dvoustranné plochy, tedy takové, u kterých lze určit jednoznačně jejich orientaci volbou normálového vektoru (to nelze např. u Möbiova pásu, který je jednostranný).

Plocha je neorientovatelná, pokud na ní existuje uzavřená křivka taková, že normálový vektor n přejde při spojitém pohybu po dané křivce v opačný vektor $-n$.

Věta 36

Nechť S je hladký kousek plochy a

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$$

je jeho parametrizace. Pak normálový vektor k S v bodě odpovídajícímu parametrům u, v je

$$\vec{n} = \pm (A(u, v), B(u, v), C(u, v)).$$

Důkaz.

Protože

$$h \begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix} = 2,$$

je alespoň jeden z determinantů $A(u, v)$, $B(u, v)$, $C(u, v)$ nenulový. Pro určitost předpokládejme, že

$$C(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom pro $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $[u, v] \xrightarrow{G} [\varphi(u, v), \psi(u, v)]$ je $C(u, v)$ Jacobián zobrazení G , tj.

$$J_G = \begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{pmatrix}, \quad C(u, v) = \det J_G(u, v) \neq 0.$$

V okolí bodu $[u, v]$ tedy existuje inverzní zobrazení k G

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y).$$

Zvolme v okolí bodu $[u, v]$ přeparametrizování

$$u = x, \quad v = y, \quad z = \chi(f(x, y), g(x, y))$$

s parciálními derivacemi

$$z_x = \chi_u f_x + \chi_v g_x, \quad z_y = \chi_u f_y + \chi_v g_y.$$

Protože $J_{G^{-1}} = (J_G)^{-1}$, máme

$$\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{C(u, v)} \begin{pmatrix} \psi_v & -\psi_u \\ -\varphi_v & \varphi_u \end{pmatrix},$$

tedy

$$z_x = \frac{1}{C(u, v)}(\chi_u \psi_v - \chi_v \psi_u) = \frac{-A(u, v)}{C(u, v)},$$
$$z_y = \frac{1}{C(u, v)}(-\chi_u \varphi_v + \chi_v \varphi_u) = \frac{-B(u, v)}{C(u, v)}$$

a

$$\vec{n} = \pm(z_x, z_y, -1) = \pm\left(\frac{-A}{C}, \frac{-B}{C}, -1\right) \sim \pm(A, B, C).$$



Poznámka

$$\Phi_u = (\varphi_u, \psi_u, \chi_u), \Phi_v = (\varphi_v, \psi_v, \chi_v) \Rightarrow \Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v) = \pm \vec{n}$$

Poznámka

$$m(S) = \lim_{\nu(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m m(\tilde{S}_i)$$

(Nezávisí na výběru reprezentantů.)

Definice 21

Plošný integrál prvního druhu

$$\iint_S G(x, y, z) \, dS$$

definujeme jako

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m G(\varphi(\xi_i, \eta_i), \psi(\xi_i, \eta_i), \chi(\xi_i, \eta_i)) m(\tilde{S}_i) = \iint_S G(x, y, z) \, dS,$$

pokud limita existuje a je nezávislá na výběru ξ_i a η_i .

Definice 22

Plošný integrál druhého druhu

$$\iint_S P(x, y, z) \, dy \, dz + Q(x, y, z) \, dx \, dz + R(x, y, z) \, dx \, dy$$

definujeme jako

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \left\langle \vec{F} \left(\varphi(\xi_i, \eta_i), \psi(\xi_i, \eta_i), \chi(\xi_i, \eta_i) \right), \right. \\ \left. \vec{n} \left(\varphi(\xi_i, \eta_i), \psi(\xi_i, \eta_i), \chi(\xi_i, \eta_i) \right) \right\rangle m(\tilde{S}_i),$$

pokud limita nezávisí na výběru reprezentantů $[\xi_i, \eta_i] \in D_i$.

Nechť M je parametricky zadaný kousek plochy,

$$S : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), [u, v] \in M,$$

a $G : S \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovaná funkce, pak

$$\begin{aligned} & \iint_S G(x, y, z) \, dS \\ &= \iint_M G(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, du \, dv. \end{aligned}$$

Věta 37

Pro počítání plošného integrálu prvního druhu platí obvyklé vzorce, zejména

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, G_1, G_2: S \rightarrow \mathbb{R}$ potom

$$\iint_S (\alpha G_1 + \beta G_2) \, dS = \alpha \iint_S G_1 \, dS + \beta \iint_S G_2 \, dS,$$

- $S = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \emptyset$, potom

$$\iint_S G \, dS = \iint_{S_1} G \, dS + \iint_{S_2} G \, dS.$$

Příklad 32

$I = \iint_S (x^2 + y^2) \, dS = ?$, kde S je plášť kužele $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \in [0, 1]$.

a) kartézská parametrizace plochy $\boxed{x = u, y = v, z = \sqrt{u^2 + v^2}}$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (u^2 + v^2) \sqrt{\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)^2 + 1} \, du \, dv \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (u^2 + v^2) \sqrt{2} \, du \, dv = \left| \begin{array}{ll} u = r \cos \varphi & \varphi \in [0, 2\pi] \\ v = r \sin \varphi & r \in [0, 1] \end{array} \right| \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r \, dr = 2\pi\sqrt{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b) polární (válcová) parametrizace $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r$

$$\begin{pmatrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 1 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

$$A(r, \varphi) = -r \cos \varphi, \quad B(r, \varphi) = -r \sin \varphi, \quad C(r, \varphi) = r,$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_M (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r^2} \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

c) sférická parametrizace $x = r \cos \varphi \frac{\sqrt{2}}{2}, y = r \sin \varphi \frac{\sqrt{2}}{2}, z = \frac{r\sqrt{2}}{2}$
(kuželová plocha má ve sférických souřadnicích rovnici $\vartheta = \vartheta_0$)

Nechť S je orientovaný hladký kousek plochy s parametrizací

$$S : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), [u, v] \in M.$$

Tato parametrizace je *souhlasná*, pokud normálový vektor $(A(u, v), B(u, v), C(u, v))$ je souhlasný s parametrizací plochy S , tj. má stejný směr jako normálový vektor určený orientací.

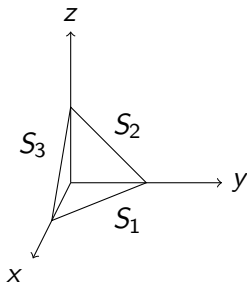
Je-li $(A(u, v), B(u, v), C(u, v))$ opačný než normálový vektor určený orientací, pak jde o *nesouhlasnou* parametrizaci.

$$\begin{aligned}
 & \iint_S P(x, y, z) \, dy \, dz + Q(x, y, z) \, dx \, dz + R(x, y, z) \, dx \, dy \\
 &= \pm \iint_M \left[P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) A(u, v) \right. \\
 &\quad \left. + Q(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) B(u, v) \right. \\
 &\quad \left. + R(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) C(u, v) \right] du \, dv \\
 &= \iint_M \langle \vec{F}(\varphi, \psi, \chi), (A, B, C) \rangle du \, dv \\
 &= \iint_M \langle \vec{F}(\varphi, \psi, \chi), \underbrace{\left(\frac{A}{H}, \frac{B}{H}, \frac{C}{H} \right)}_{\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}} \rangle \underbrace{H \, du \, dv}_{dS},
 \end{aligned}$$

kde $H = H(u, v) = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Příklad 33

$\iint_S xy \, dy \, dz + yz \, dx \, dz + xz \, dx \, dy = ?$, kde S je jednotkový simplex $x = 0, y = 0, z = 0, z = 1 - x - y$ orientovaný ve směru vnější normály.



$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

$$S_1 : x \in [0, 1], y \in [0, 1 - x], z = 0$$

$$\text{parametrizace: } x = u, y = v, z = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A, B, C) = (0, 0, 1)$$

(nesouhlasná orientace)

$$\iint_{S_1} xy \, dy \, dz + yz \, dx \, dz + xz \, dx \, dy$$

$$= - \int_M (u \cdot v \cdot 0 + v \cdot 0 \cdot 0 + u \cdot 0 \cdot 1) \, du \, dv = 0$$

Analogicky $\iint_{S_2} = 0$ a $\iint_{S_3} = 0$.

$S_4 : x = u, y = v, z = 1 - u - v$, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = 1, B = 1, C = 1, \quad \vec{n} = (1, 1, 1)$$

a orientace je tedy souhlasná.

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} \left(u \cdot v \cdot 1 + v(1 - u - v) \cdot 1 + u(1 - u - v) \cdot 1 \right) du dv \\ = \int_0^1 \int_0^{1-u} (uv + v - uv - v^2 + u - u^2 - uv) dv du = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Příklad 34

$$\iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy = ?$$

kde S je kulová sféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientovaná ve směru vnější normály.

Parametrizace $x = 1 \cdot \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = 1 \cdot \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = 1 \cdot \cos \vartheta$ dává

$$\begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & 0 \\ \cos \varphi \cos \vartheta & \sin \varphi \cos \vartheta & -\sin \vartheta \end{pmatrix},$$

tedy

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (-\cos \varphi \sin^2 \vartheta, -\sin \varphi \sin^2 \vartheta, -\sin^2 \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta - \cos^2 \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta) \\ &= (-\cos \varphi \sin^2 \vartheta, -\sin \varphi \sin^2 \vartheta, -\sin \vartheta \cos \vartheta) \end{aligned}$$

$\vartheta = \frac{\pi}{4} = \varphi : \vec{n} = (< 0, < 0, < 0)$ orientace je nesouhlasná, míří v 1. oktantu dozadu dolů, plocha je orientovaná nahoru a ven.

$$\begin{aligned}
 I &= - \iint_S \left[\cos \varphi \sin \vartheta (-\cos \varphi \sin^2 \vartheta) + \sin \varphi \sin \vartheta (-\sin \varphi \sin^2 \vartheta) \right. \\
 &\quad \left. + \cos \vartheta (-\sin \vartheta \cos \vartheta) \right] d\varphi d\vartheta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta + \sin^2 \varphi \sin^3 \vartheta + \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) d\varphi d\vartheta \\
 &= 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \vartheta + \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = 4\pi
 \end{aligned}$$

Poznámka

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, kde vektorové pole $\vec{F}$ má souřadnice (x, y, z) , tedy

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

a $\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (na kouli), proto

$$\iint_S 1 \, dS = 4\pi r^2 = |r = 1| = 4\pi.$$

Greenova věta říká, že pro integrál přes křivku orientovanou kladně platí

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy.$$

Definice 23

- Množinu

$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

nazýváme *jednoduchý (regulární, normální) obor vzhledem k ose z*.

- Analogicky definujeme jednoduché obory vzhledem k osám x a y .
- Řekneme, že množina $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^3$ je jednoduchý obor v $\mathbb{R}^3$, pokud je konečným sjednocením jednoduchých oborů vzhledem ke všem osám x, y, z .

Příklad 35

Čtyřboký jehlan je jednoduchým oborem vzhledem ke všem osám (simplex).

Věta 38

Nechť V je jednoduchý obor vzhledem k ose z , S je plocha ohraničující V orientovaná ve směru vnější normály a funkce $R: V \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá spolu s parciální derivací R_z na množině $\overline{V}$ (uzávěr V). Pak platí

$$\iint_S R(x, y, z) \, dx \, dy = \iiint_V R_z(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Důkaz.

Pravá strana rovnosti je

$$\begin{aligned} \iiint_V R_z(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &\stackrel{[\text{Fubini}]}{=} \iint_M \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} R_z(x, y, z) \, dz \right] dx \, dy \\ &= \iint_M [R(x, y, h(x, y)) - R(x, y, g(x, y))] \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Levou stranu rozepíšeme jako

$$\begin{aligned} &\iint_S R(x, y, z) \, dx \, dy \\ &= \underbrace{\iint_{S_1} R(x, y, z) \, dx \, dy}_{\text{dno}} + \underbrace{\iint_{S_2} R(x, y, z) \, dx \, dy}_{\text{plášť}} + \underbrace{\iint_{S_3} R(x, y, z) \, dx \, dy}_{\text{víko}}. \end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} R(x, y, z) \, dx \, dy &= \left| \begin{array}{l} x = u, y = v, z = g(u, v) \\ (-g_x, -g_y, 1), \text{ nesouhl. par.} \end{array} \right| = - \iint_M R(x, y, g(x, y)) \, dx \, dy, \\ \iint_{S_3} R(x, y, z) \, dx \, dy &= + \iint_M R(x, y, h(x, y)) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Dále $\iint_{S_2} R(x, y, z) \, dx \, dy = 0$, protože plášť válce má stěny rovnoběžné s osou z a tok podél osy z neprochází do boku ($\vec{F} = (P, Q, R) = (0, 0, R)$). Celkem tedy

$$\begin{aligned} \iint_S R(x, y, z) \, dx \, dy &= \iint_M R(x, y, h(x, y)) \, dx \, dy - \iint_M R(x, y, g(x, y)) \, dx \, dy. \end{aligned}$$



Věta 39

Za předpokladů analogickým k předpokladům předchozí věty platí pro jednoduché obory vzhledem k y , resp. x vztahy

$$\iint_S Q(x, y, z) \, dx \, dz = \iiint_V Q_y(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

resp.

$$\iint_S P(x, y, z) \, dy \, dz = \iiint_V P_x(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Věta 40 (Gaussova–Ostrogradského věta)

Nechť V je jednoduchý obor v $\mathbb{R}^3$, funkce $P, Q, R: V \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité na $\overline{V}$ spolu s parciálními derivacemi P_x, Q_y, R_z a nechť S je ohraničená plocha ohraničující V orientovaná ve směru vnější normály. Pak platí

$$\begin{aligned} \iint_S [P(x, y, z) \, dy \, dz + Q(x, y, z) \, dx \, dz + R(x, y, z) \, dx \, dy] \\ = \iiint_V [P_x(x, y, z) + Q_y(x, y, z) + R_z(x, y, z)] \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Příklad 36

$$I = \iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy = ?$$

kde $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientovaná vně.

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \cdot \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} dx \, dy \, dz \\ &= 3 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = |r = 1| = 4\pi \end{aligned}$$

Poznámka

Nechť S ohraničuje V a je orientovaná vně.

- $S \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow m(S) = \frac{1}{2} \oint_C (-y \, dx + x \, dy)$.
- $m(V) = \frac{1}{3} \iiint_V (x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy)$.
- Pro $\vec{F} = (P, Q, R)$ je $\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$ *divergence* vektorového pole.
- Vektorové pole je nezřídlové $\Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{F} = 0$.
- Gaussovu–Ostrogradského větu lze zapsat jako

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz.$$

Věta 41

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je jednoduchá oblast omezená uzavřenou křivkou L . Nechť S je plocha v prostoru, která je grafem funkce $z = f(x, y)$, f je spojitá na $\overline{M}$ spolu s parciálními derivacemi f_x, f_y . Dále nechť C je prostorová křivka ohraničující S , tj. křivka, jejíž průmět do podstavné roviny $z = 0$ je rovinná křivka L , a předpokládejme, že křivka C je souhlasně orientovaná s plochou S podle pravidla pravé ruky. Pak

$$\oint_C P(x, y, z) \, dx = \iint_S [P_z(x, y, z)n_2 - P_y(x, y, z)n_3] \, dS,$$

$$\left(dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy \right),$$

kde $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ je jednotkový normálový vektor k ploše S souhlasný s její orientací.

Důkaz.

$$\oint_C P \, dx \xrightarrow{\text{projekce}} \oint_L \xrightarrow{\text{Greenova V.}} \iint_M \xrightarrow{\text{zpětná projekce}} \iint_S$$

$$\begin{aligned} \oint_C P(x, y, z) \, dx &= \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) = f(x(t), y(t)) \end{array} \right\} \text{ parametrizace } L \left. \vphantom{\oint_C} \right\} \text{ parametrizace } C \\ &= \oint_L P(x, y, f(x, y)) \, dx = - \iint_M \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y)) \, dx \, dy \\ &= - \iint_M [P_y(x, y, f(x, y)) + P_z(x, y, f(x, y))f_y(x, y)] \, dx \, dy \quad (\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \iint_M \left[P_y(x, y, f(x, y)) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}}_{n_3} \right. \\
 &\quad \left. - P_z(x, y, f(x, y)) \underbrace{\frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}}_{n_2} \right] \underbrace{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy}_{dS}
 \end{aligned}$$

$$= \iint_S [P_z(x, y, z)n_2 - P_y(x, y, z)n_3] \, dS,$$

$$\text{kde } \vec{n} = \pm(-f_x, -f_y, 1), \|\vec{n}\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

□

Věta 42

Za předpokladů analogickým k předpokladům předchozí věty platí

$$\oint_C Q(x, y, z) \, dy = \iint_S [Q_x(x, y, z)n_3 - Q_z(x, y, z)n_1] \, dS,$$
$$\oint_C R(x, y, z) \, dz = \iint_S [R_y(x, y, z)n_1 - R_x(x, y, z)n_2] \, dS.$$

Věta 43 (Stokesova věta)

Nechť plochu S , která je omezená uzavřenou prostorovou křivkou C tvořící kraj S , lze rozložit na konečný počet částí, které jsou grafy funkcí proměnných x, y , totéž pro x, z a y, z . Nechť funkce $P, Q, R: S \rightarrow \mathbb{R}$ jsou na S spojité spolu se svými parciálními derivacemi prvního řádu. Dále nechť křivka C je orientována souhlasně s S . Pak platí

$$\oint_C P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz \\ = \iint_S (R_y - Q_z) \, dy \, dz + (P_z - R_x) \, dx \, dz + (Q_x - P_y) \, dx \, dy.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} & \oint_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz \\ &= \iint_S \left[(P_z n_2 - P_y n_3) + (Q_x n_3 - Q_z n_1) + (R_y n_1 - R_x n_2) \right] \, dS \\ &= \iint_S \left[(R_y - Q_z) n_1 + (P_z - R_x) n_2 + (Q_x - P_y) n_3 \right] \, dS \\ &= \iint_S \left\langle (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y), \vec{n} \right\rangle \, dS \\ &= \iint_S (R_y - Q_z) \, dy \, dz + (P_z - R_x) \, dx \, dz + (Q_x - P_y) \, dx \, dy \end{aligned}$$



Poznámka

Nechť

$$\vec{F} = (P, Q, R): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad [x, y, z] \mapsto [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)].$$

Rotace vektorového pole je

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} R - \frac{\partial}{\partial z} Q, -\frac{\partial}{\partial x} R + \frac{\partial}{\partial z} P, \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P \right) \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y). \end{aligned}$$

Stokesovu větu lze přepsat do tvaru

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Příklad 37

Pomocí Stokesovy věty vypočtete integrál

$$\oint_C y \, dx + z \, dy + x \, dz,$$

kde C je prostorová křivka, která vznikne jako průsečík kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ a roviny $x + y + z = 0$, orientovaná tak, že její průmět do podstavné roviny xy (tj. $z = 0$) je orientován kladně (proti směru hodinových ručiček).

$$\vec{F} = (y, z, x), \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (0 - 1, 0 - 1, 0 - 1) = -(1, 1, 1)$$

$$\oint_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = - \iint_S 1 \, dy \, dz + 1 \, dx \, dz + 1 \, dx \, dy,$$

kde S je část roviny $x + y + z = 0$ uvnitř koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Dále

$$\begin{aligned} - \iint_S 1 \, dy \, dz + 1 \, dx \, dz + 1 \, dx \, dy &= - \iint_S \langle (1, 1, 1), \vec{n} \rangle \, dS \\ &= \left| \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \text{ je jednotkový norm. vektor k ploše } S \right| \\ &= - \iint_S \left\langle (1, 1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle \, dS \\ &= -\frac{3}{\sqrt{3}}m(S) = -\sqrt{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

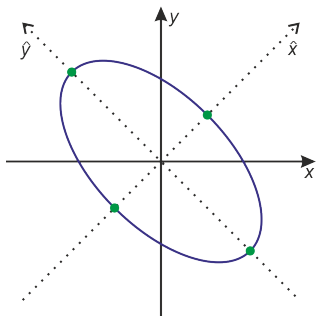
Pokusme se příklad vyřešit bez použití Stokesovy věty.

Je-li $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, parametrizace průmětu křivky do roviny $z = 0$, pak (použijeme rovinu $x + y + z = 0$)

$$\begin{aligned} & \int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [\psi(t)\varphi'(t) + (-\varphi(t) - \psi(t))\psi'(t) + \varphi(t)(-\varphi'(t) - \psi'(t))] \, dt. \end{aligned}$$

Průmět křivky C do roviny xy bude elipsa $\mathcal{E}$. Kvůli parametrizaci zjišťujeme, jak je natočená, a to pomocí Lagrangeových multiplikátorů, tj. $\mathcal{E} : x^2 + y^2 \rightarrow \text{extrém}$.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) \\ &= x^2 + y^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) + \lambda_2(x + y + z). \end{aligned}$$



$$L_x = 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$

$$L_y = 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$$

$$L_z = 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$x + y + z = 0$$

$\Rightarrow$ body $[x, y, z]$:

$$\left[\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, 0 \right], \left[-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0 \right], \left[\frac{a}{\sqrt{6}}, \frac{a}{\sqrt{6}}, -\frac{2a}{\sqrt{6}} \right], \left[-\frac{a}{\sqrt{6}}, -\frac{a}{\sqrt{6}}, \frac{2a}{\sqrt{6}} \right]$$

Odtud dostaneme poloosy ($a/\sqrt{3}$ pro $\hat{x}$ a a pro $\hat{y}$) a tedy parametrizaci $\hat{x} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cos t, \hat{y} = a \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Dále nové souřadné osy vzniknou ze starých jako (musíme zohlednit změnu měřítka a orientaci) $\hat{x} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \hat{y} = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$. Odtud vyjádříme x a y v závislosti na t

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} a \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right), y = \frac{\sqrt{2}}{2} a \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right)$$

a dosazením do

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\psi(t)\varphi'(t) + (-\varphi(t) - \psi(t))\psi'(t) + \varphi(t)(-\varphi'(t) - \psi'(t))] dt$$

získáme výsledek.

Hamiltonův nabla formalismus pro gradient, divergenci a rotaci

Nechť $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ je vektorové pole.

- Gradient $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
- $\operatorname{div} \vec{F} = \langle \nabla, \vec{F} \rangle = P_x + Q_y + R_z$
- Divergence udává zřídlovitost vektorového pole. (Je-li rovna nule, je pole nezřídlové.)
- $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$
- Rotace udává lokální míru rotace v daném bodě. (Je-li nulová, je pole nevírové.)
- spojitost, tedy záměnné parciální derivace
 $\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \langle \nabla, \nabla \times \vec{F} \rangle = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0$
- $\nabla \times \vec{F}$ je vektor kolmý jak k ∇ , tak i k $\vec{F}$

Nechť $f(x, y, z)$ je skalární pole.

- Gradient funkce $f(x, y, z)$

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

- Gradient je kolmý k vrstevnicím a směřuje k vyšším funkčním hodnotám.
- Totální diferenciál funkce $f(x, y, z)$

$$df = \nabla f \cdot (dx, dy, dz) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Funkce f je kmenová funkce daného diferenciálu.

- $\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times \nabla f = 0$
(vektorový součin lineárně závislých vektorů)
- $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \langle \nabla, \nabla f \rangle = \nabla^2 f$
(Laplaceův operátor)

- $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ hladká v oblasti obsahující množinu Ω a její hranici $\partial\Omega$ (při obíhání po hranici je množina vlevo), pak (Greenova věta):

- 1 Cirkulace po hranici $\partial\Omega$ je (viz třetí složku $\text{rot } \vec{F}$)

$$\oint_{\partial\Omega} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{\Omega} Q_x(x, y) - P_y(x, y)dxdy.$$

- 2 Tok přes hranici $\partial\Omega$ je (viz $\text{div } \vec{F}$)

$$\oint_{\partial\Omega} -Q(x, y)dx + P(x, y)dy = \iint_{\Omega} P_x(x, y) + Q_y(x, y)dxdy.$$